Государственный комитет Совета Министров СССР
по делам строительства

Центральный научно-исследовательский и проектно-экспериментальный институт автоматизированных систем в строительстве
(ЦНИПИАСС)

УДК 69.003:658.5.014.011.56

№ Гос.регистрации 78026349

Инвентарный №

"Утверждаю"
Директор ЦНИПИАСС
д.т.н., профессор

А.А.Гусаков

"24" 04 1979 г.

ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОЕКТ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Том 3. Информационное обеспечение АСП СОУ
Книга 4. Каталог методов. Методы оптимизации.

шифр 35/78

Зав.сектором,
научный руководитель темы — С.П.Никаноров

Ответственный исполнитель,
с.н.с.,к.т.н. — Б.Б.Егоров

Москва - 1978

Настоящий отчет представляет собой результаты научно-исследовательских работ, проведенных в ЦЭМИ АН СССР по хоз.договору № 35/78 с ЦНИПИАСС Госстроя СССР "Разработка программного обеспечения автоматизированной системы проектирования систем организационного управления"

В работе участвовали:

Научный руководитель	К.В.КИМ
Ответственный исполнитель	Ю.В.ПОПОВ
Зав.отделом, д.ф.-м.н.	Е.Г.ГОЛЬШТЕЙН
Ст.н.с., к.ф.-м.н.	С.С.ЛЕБЕДЕВ
Зав.лабораторией, к.ф.-м.н	У.Х.МАЛКОВ
Ст.н.с.,к.ф.-м.н.	В.А.СКОКОВ
Ст.н.т.с.	Л.М.САЛТЫКОВА

Реферат

Отчет содержит 92 страницы из них 3 рисунка.

Ключевые слова: оптимизационные модели, экономические модели, игровые модели оптимизации, методы линейного программирования, безусловная оптимизация, целочисленное программирование, каталог методов.

Отчет состоит из введения, четырех глав и заключения.
Первые три главы содержат обзор современного уровня развития экономических оптимизационных моделей в реальных областях применения (I глава), рассмотрен наиболее распространенный принцип классификации оптимизационных математических моделей (2 глава), приведен обзор состояния методов математического программирования. Четвертая глава посвящена описанию теоретических основ построения каталога методов в системе АСП СОУ. Приводится пример каталога методов, включающий в себя большинство методов, рассмотренных в первых трех главах.

Содержание

В В Е Д Е Н И Е

Целью данной работы является привязка разрабатываемых в СССР пакетов прикладных программ (ППП) для решения оптимизационных задач (ОЗ) к условиям применения их в составе разрабатываемой в ЛЕНИИАСС автоматизированной системы проектирования (АСП) систем организационного управления (СОУ). В качестве основного объекта исследований и привязки рассматривалась совокупность ППП, разрабатываемых кооперацией организаций в соответствии с координационным планом по проблеме 0.80.14, задание 10.03 "Сдать и ввести в эксплуатацию ППП для реализации математических методов исследования операций", утвержденным постановлением ГКНТ СМ СССР № 430 от 26/XI-76 г. и Распоряжением Президиума АН СССР № 10103-97 от 17/I-77 г. Для оценки условий применения пакетов рассматривались материалы Технического проекта АСП СОУ, в частности - Том 7, Книга 6. Обоснование технических решений, принятых в АСП СОУ,

- Том 2. Книга 7, Технический проект блока выбора методов,
- Том 3. Книга 3, Каталог методов.

В соответствии с Техническим проектом АСП СОУ пакеты прикладных программ для решения оптимизационных задач, являются и средствами АСП, и средствами СОУ. В обоих случаях доступ к ППП осуществляется средствами информационного поиска в Каталоге методов. Поскольку АСП СОУ является системой человеко-машинного проектирования, на первых этапах создания Каталога методов, разрабатываемые ППП могут быть включены в его состав целиком как элементарные объекты.

Такой способ включения ППП в Каталог метода может быть осуществлен заполнением информационной карты для каждого пакета по правилам, предусмотренным в Техническом проекте АСП СОУ Том 3, Книга 3, п.9.

Создаваемые ППП являются средствами широкого назначения в некоторых областях деятельности. Так например, средствами ППП, разрабатываемого в Вычислительном центре АН СССР можно проводить широкий круг работ по изучению и развитию вычислительных методов в области нелинейного программирования. В то же время использование этого пакета для решения конкретной задачи планирования в рамках СОУ невозможно, так как ППП „ДИСО" привязан к ЭВМ БЭСМ-6 ВЦ АН СССР и перенос его в другие условия экономически невыгоден.

Пакет анализа оптимизационных экономических моделей разрабатываемый в ЦЭМИ, задуман как библиотека модулей на языках PL/I и FORTRAN. Он обладает свойством переносимости, однако не предоставляет таких удобств пользователю, как например средства диалога.

Рассмотрение ППП в целом как метода, затрудняет дифференциацию средств по функциональному назначению, оценку качества применения ППП в конкретных условиях.

Поэтому дальнейшее развитие средств АСП СОУ и в частности Каталога методов, требует изучения внутренней структуры ППП, функциональную ориентацию отдельных элементов ППП, оценки зоны их эффективности. Такая постановка вопроса в свою очередь требует проведения исследований в областях, выходящих за пределы собственно ППП, в частности, изучения областей их функциональной ориентации, а также структуризации этих областей. Основные трудности таких исследований, заключаются в том, что Концепция АСП СОУ предполагает формальную структуризацию понятий функция, задача, метод, а пакеты прикладных программ рождаются как средства решения тех или иных проблем, описанных в интерпретированном виде. Кроме того в Техническом задании АСП СОУ выбор метода рассматривается как процедура установления связи "функция" - "метод", где первое есть объект функциональной системы, второе - объект Каталога методов. В то же время области функциональной ориентации ППП допускают существование иерархических связей типа "задача" - "метод". Таким образом в своих исследованиях мы должны были либо заниматься интерпретацией некоторых классов функциональных систем, либо расширять понятие оптимизационный метод и выводить его из рамок ППП. Для того, чтобы осуществлять привязку оптимизационных методов, только через Каталог методов, мы выбрали второй путь. В понятие оптимизационный метод мы включили все объекты из области функциональной ориентации ППП ОЗ; а также сами пакеты. В своих исследованиях мы опираемся на следующее определение ППП ОЗ: "ПППОЗ - средства програмного обеспечения для количественного анализа математических моделей оптимизации и решения экономических оптимизационных задач", На основе этого определения в области функциональной ориентации ПППОЗ выделяются четыре зоны:

экономические оптимизационные модели
математические модели оптимизации
численные методы количественного анализа
програмное обеспечение ЭВМ.

Первые три главы настоящего отчета содержат результаты анализа и систематизации объектов в этих зонах. Первая глава основывается на анализе опыта применения ЭММ и ЭВМ в ЦЭМИ, Госплане СССР, ИЭ СО и ряде других организаций. Вторая и третья главы содержат современное представление о математических оптимизационных моделях и численных методах. В рамках этих представлений ведутся разработки методов алгоритмов и програм.

В четвертой главе предлагаются некоторые методические рекомендации по систематизации Каталога методов, в части оптимизационных средств.

При выборе средств описания структуры Каталога мы исходили из необходимости дальнейшей машинной реализации процедур выбора методов. Поэтому среди возможных средств информационного поиска и преобразований данных мы стремились выбрать такие, которые в большей мере ориентированы во-первых на человеко-машинный режим проектирования, в третьих на эффективную машинную реализацию процедур поиска и анализа связей между объектами. Кроме того мы стремились, если не удовлетворить полностью, то по крайней мере учесть по возможности требования и стиль формализаций в проекте АСП ССУ. В качестве основы использованы принципы сетевого описания систем, разработанные нами для анализа и синтеза проблемно-ориентированных комплексов программ в составе эскизного проекта "Комплекс".

Методические рекомендации состоят из четырех частей. Первая часть - уточнение понятий. Уточняются понятия оптимизационных методов, Каталога методов, ведения Каталога методов, выбора методов. Уточняется смысл автоматизации процессов ведения и выбора методов. Формулируются требования к структуре КМ.

Во второй части дается изложение основных принципов сетевого описания систем.

В третьей части Каталог оптимизационных методов, рассматривается как классификационно-инструментальная система с тремя разрезами. В качестве примеров рассматриваются некоторые фрагменты, в которых использованы результаты анализа и предварительной систематизации оптимизационных методов, изложенные в предыдущих главах.

В заключении формулируются основные выводы, обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

ГЛАВА I. ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

I.I. Классификация по уровням приложения (интерпретированные модели)

Линейные оптимизационные модели производства распределения и потребления являются в настоящее время наиболее разработанным инструментом исследования экономических процессов. Это в первую очередь объясняется как сравнительной простотой построения самой модели и математических методов ее исследования, так и возможностями экономической интерпретации результатов.

Экономико-математические модели целесообразно подразделять по уровню иерархии исследуемых с их помощью объектов. Действительно, несмотря на то, что математический аппарат, применяемый для построения моделей функционирования всего народного хозяйства и отдельного предприятия, может быть почти одинаковым, экономический смысл результатов существенно различен.

В силу причин технического характера таких как существенная дискретность производства на отдельном предприятии, чрезвычайно большое число конкретных технологий и т.д., мы в своих рассмотрениях ограничимся лишь моделями высокого уровня. В настоящее время наиболее широкое распространение получили следующая классификация моделей по уровням иерархии экономических структур [3] :

1. динамические модели межотраслевых связей в целом по стране [2, I4, I5, I6, I7],
2. межрайонные модели (основной упор на оптимальное размещение производительных сил по регионам) [2, I4, I8, 22, 29],
3. перспективное планирование отраслей и многоотраслевых комплексов [I, 2, 2I, 27],
4. модели развития территориальных экономических единиц [20, 2, 2I].

Список литературы по указанным моделям конечно гораздо шире, но приведенные источники отражают в целом существо дела.

Существуют и более подробные классификации экономико-математических задач, например предложенная в [2], однако основная идея подразделения моделей по уровню иерархии народнохозяйственных объектов сохраняется.

Уровень модели отражается в первую очередь на трудностях в получении и подготовке исходной информации. Например, для статической модели многоотраслевого комплекса необходимо получить и ввести в вычислительную машину сведения:

1. о потребности в различных видах продукции в целом по стране, по отдельным районам, по отраслям,
2. о ресурсах сырья по отдельным районам добычи,
3. о ресурсах сырья, поступающих в блок извне.
4. о несырьевых ресурсах, таких как рабочая сила, территория по всем районам,
5. о вариантах технологических процессов на действующих и проектируемых предприятиях, матрицы затраты-выпуск по всем продуктам.
6. о себестоимостях и капиталовложениях по различным видам технологических процессов с учетом районных различий и видов исходных продуктов,
7. об удельных транспортных затратах с учетом особенностей грузов, маршрутов перевозок, видов транспорта.

Отметим некоторые характерные особенности экономической интерпретации задач, входящих в приведенную классификацию. Основным отличием народнохозяйственной модели самого высокого уровня иерархии является ее агрегированность. В силу огромного числа различных продуктов, технологических процессов, производящих и потребляющих предприятий принимающих участие в функционировании экономики страны оказывается невозможным не только решить, но даже записать в какой бы то ни было форме соответствующую задачу огромной размерности. Поэтому при построении народнохозяйственной модели обычно пользуются агрегированными продуктами, производителями которых являются нение агрегированные отрасли. При таком рассмотрении теряет всякий реальный смысл понятие технологического способа как того или иного варианта изготовления данного конкретного вида продукта.

На уровне народнохозяйственной модели технологические способы имеют смысл различных вариантов развития той или иной агрегированной отрасли, причем эти варианты, определяемые вне модели, строятся в каждом случае конкретно с учетом ассортимента выпускаемой продукции, типов новых и реконструируемых предприятий, размеров капиталовложений.

Другой особенностью народнохозяйственных моделей является необходимость обеспечения увязки производственных секторов экономики с непроизводственными. Для этого в состав отраслей, рассматриваемых в модели могут включаться основные отрасли непроизводственной сферы, такие как здравоохранение, просвещение и т.д.

Модели первого уровня по нашей классификации обычно рассматриваются лишь в динамической постановке. Модели остальных уровней можно рассматривать также и в статической форме. Отметим, что в динамической постановке задачи связь между блоками, отвечающим разным отрезкам планового периода осуществляется обычно с помощью ограничений на основные производственные фонды.

Межрайонные межотраслевые модели, - весьма важная область применения экономико-математических методов, которая начала развиваться сравнительно недавно. Основной причиной этого являются существенные трудности связанные с получением и подготовкой большого количества информации, а также с большой размерностью получающихся задач. Информационные трудности связаны также с тем, что число однородных предприятий отрасли в одном районе как правило невелико, а значит усреднение и интерполяция приводят к большим погрешностям. Отметим также дискуссионный характер критерия оптимальности в межрайонных моделях. Действительно, район как исторически сложившаяся территориальная общность людей должен стремиться к максимальному повышению своего жизненного уровня в пределах имеющихся ресурсов. С другой стороны хозяйство отдельного района есть элемент экономической системы всей страны, а значит максимизироваться должен вклад в общую экономику. Такая двойственность критерия оптимальности должна учитываться в каждом конкретном случае.

Существование тесной взаимосвязи между закономерностями развития и размещения производства одной отрасли от конкретных параметров других, тесно связанных с ней отраслей определяет необходимость рассмотрения отраслевых и многоотраслевых моделей. Как отраслевые, так и многоотраслевые модели в настоящее время получили широкое развитие и с успехом эксплуатируются. Отраслевые модели позволяют производить правильный выбор вариантов размещения, развития и строительства предприятий с учетом местных ресурсов и траспортных затрат. Более полным образом оценить все эти факторы позволяют межотраслевые модели, для которых однако требуются значительно больние объемы информации. Особенно важным является тот факт, что как отраслевые, так и межотраслевые модели, имеют чрезвычайно много общих черт, не зависящих от того какая отрасль или межотраслевой комплекс рассматриваются. Это позволяет строить общие модели оптимизации отрасли и многоотраслевого комплекса. Особенности конкретного изучаемого объекта находят свои отражения в численных значениях параметров общей модели, в специфике структуры ограничений.

Важную роль в решении конкретных прикладных задач имеют также вопросы математического обеспечения такие как создание комплекса программ реализующих как непосредственное решение задачи, так и формирование необходимой расчетной информации, вывода результатов решения в удобный для экономического анализа виде, проведение экспериментов с моделью. Единый вид моделей значительно облегчает решение перечисленных вопросов.

Для всестороннего учета местных возможностей, таких как ограниченные ресурсы земли, воды, рабочей силы, возможности развития транспортных путей, разрабатываются специальные модели развития районов и территориально-производ-

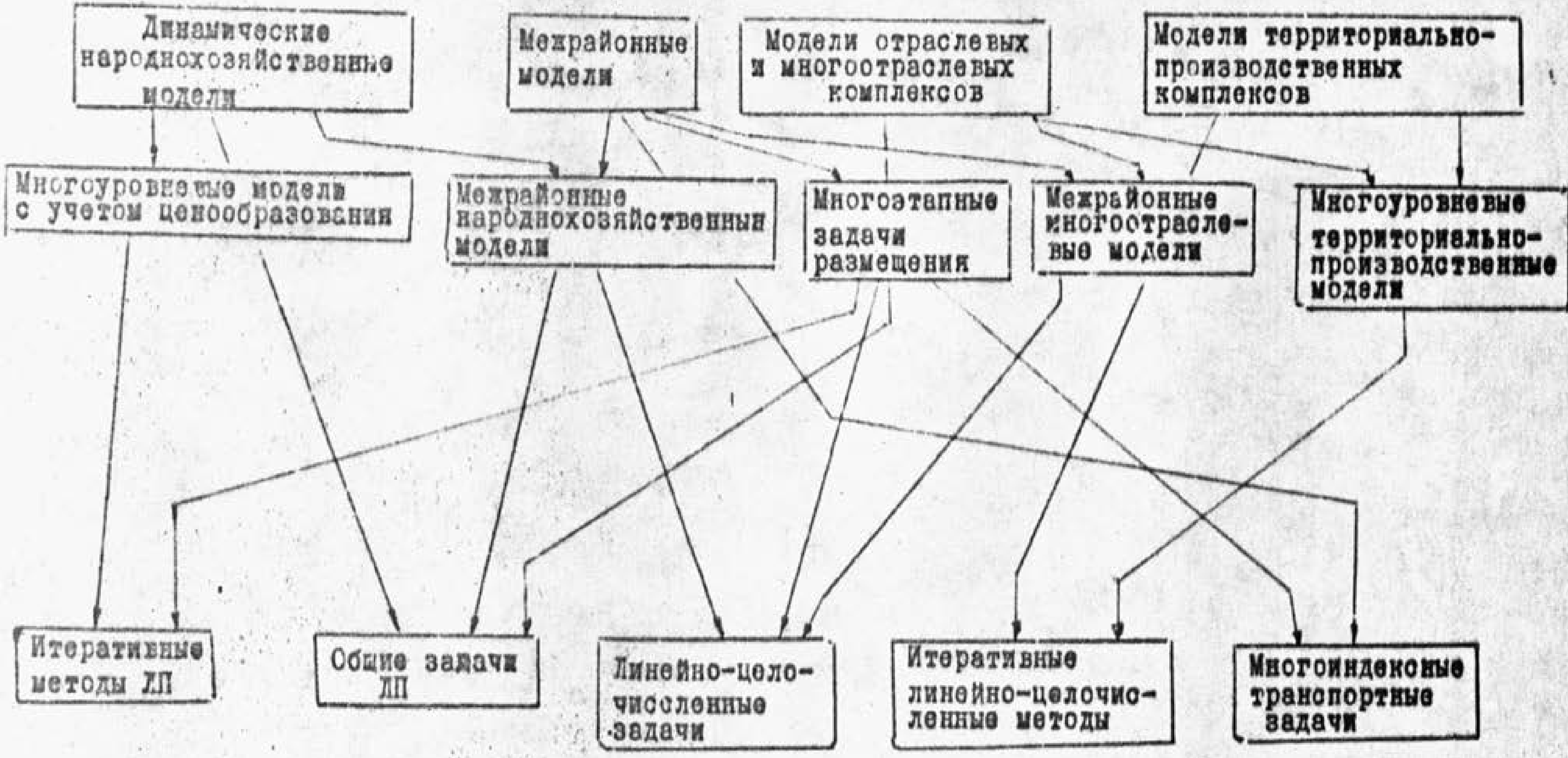


Рис. I Схема моделей и методов экономических линейно оптимизационных задач ственных ~~задач~~ (комплексов, которые) в свою очередь используются для уточнения информации о затратах и эффективности производства в отраслевых моделях.

В территориальных задачах в гораздо большей мере чем в задачах более высокого уровня иерархии необходимо учитывать целочисленность переменных и альтернативный характер вариантов развития производства.

Модель территориально-производственного комплекса (ТПК) естественным образом разбивается на следующие этапы: I.размещение промышленных объектов (основную роль здесь играет ограничение земельных ресурсов); 2. разработка схемы обеспечения производства необходимыми ресурсами; 3. разработка транспортной сети; 4. разработка схемы обеспечения энергией. Процесс определения оптимальной структуры ТПК состоит таким образом в итеративном повторении расчетов по каждому из перечисленных этапов до тех пор пока не будет достигнуто устойчивое решение. Отметим, что формально можно включать электроэнергию и транспорт в понятие ресурса и свести задачу к двум, и даже к одному этапу, однако подобное разделение позволяет не только резко сократить размерность задачи, но и позволяет более полно учитывать специфику отдельных ограничений, а также облегчает экономическую интерпретацию результатов.

Возможные алгоритмы решения задачи развития и формирования ТПК описаны в работах [30, 31].

На рисунке I схематически изображена описанная классификация экономико-математических задач и математические методы, применяемые для их решения. На верхних уровнях показаны основные классы задач, а также подклассы задач, которые имеют важное значение, но не могут однозначным образом быть отнесены к одному из основных классов. На нижнем уровне показаны основные методы решения соответствующих задач.

I.2. Структурная классификаци линейных экономических моделей

I.2.I. Принципы формализации структурного описания

Исследуется некоторое количество объектов каждый из которых однозначно определяется (обладает) некоторым набором признаков из конечного множества. Каждый признак принимает конечное число значений. Причем различные объекты могут обладать как различными так и частично (в частности полностью) пересекающимися наборами признаков. У каждого объекта имеется некоторое количество характеристик принимающих числовые (положительные) значения. Естественно каждой характеристике сопоставить те же признаки, которыми обладают соответствующие объекты.

В задачах линейного программирования характеристики объектов называются переменными, а соответствующие признаки индексами. В прикладных задачах все характеристики объектов имеют реальный смысл и носят соответствующие названия. Обычно переменные, относящиеся к характеристикам разных объектов, но имеющие одинаковый смысл обозначаются одинаковыми буквами, а числовые значения индексов показывают к какому именно объекту относится данная переменная. Тем самым происходит естественное разделение множества всех переменных на группы по одинаковому реальному смыслу. Процесс решения задачи ЛП заключается в нахождении экстремума линейного функционала от переменных при условии что объекты обладают зафиксированным множеством свойств. Свойства объектов заключаются в том, что выполняются различные линейные ограничения типа равенств и неравенств нулю линейных форм от переменных. Коэффициенты всех этих линейных форм образуют собственно матрицу задачи линейного программирования.

Ограничения задачи удобным образом подразделяются на группы в зависимости от того, внутри каких групп переменных происходит суммирование и по каким индекса. Группа содержит все ограничения в которых происходит суммирование переменных из одних и тех же групп по одним и тем же индексам. В зависимости от реального смысла суммируемых переменных и индексов, по которым суммирование не производится определяется реальный смысл конкретного ограничения и всей группы ограничений. В практических задачах обычно ясен реальный смысл всех или по крайней мере подавляющего большинства групп ограничений. Об этом подробнее будет сказано ниже. Используя полученное разбиение переменных и ограничений на смысловые группы удается определить структуру матрицы в реальных задачах линейного программирования. Знание этой структуры часто оказывается очень полезным для нахождения метода непосредственного решения задачи. Блочная структура позволяет строить итерационные алгоритмы, существенно уменьшающие трудоемкость расчетов.

Установление структуры матрицы проводится с использованием следующих естественных соображений: если переменные некоторой группы не участвуют в ограничениях из некоторой другой группы, то на соответствующих местах в матрице стоят нули, если же в группе ограничений происходит суммирование переменных из данной группы, то коэффициенты в соответствующей части матрицы могут быть отличны от нуля. Таким образом, происходит разбиение всей матрицы на блоки, про некоторые из которых можно заранее сказать, что они нулевые. Здесь охарактеризована процедура выделения наиболее крупных блоков в задаче. Часто, оказывается возможным продолжить разбиение этих блоков на более мелкие. Поясним все вышесказанное на примере реальной экономической задачи линейного программирования. Рассмотрим так называемую общую статическую задачу развития и размещения производства отрасли [1] , включающую в себя добычу и переработку сырья, производство полуфабрикатов и конечное потребление продукции. Несмотря на то, что эта задача не является в точном смысле слова задачей линейного программирования, из-за того что в ней присутствуют целочисленные переменные, на ее примере можно продемонстрировать все особенности формирования реальных задач.

В соответствии с употреблявшейся ранее терминологией объектами в данном случае являются пункты добычи сырья, пункты переработки сырья, пункты производства и пункты потребления промежуточной продукции, пункты производства и потребления конечной продукции. Признаками объектов или иначе индексами переменных являются

i - номер конечного продукта,

ℓ - номер пункта производства конечного продукта,

k - номер потребителя конечного продукта,
j - номер технологического способа производства,
ν - номер варианта развития производящего предприятия,
p - номер промежуточного продукта,
ℓ', ℓ'' - номера пунктов производства и потребления промежуточного продукта,
s - номер вида сырья,
z - номер пункта добычи сырья,
n - номер потребителя сырья,
φ - номер технологического способа добычи сырья,
μ - номер варианта развития добывающего предприятия.

Реальный смысл переменных следующий:

$y_i^{\ell k}$ - объем перевозок конечного продукта,
$\bar{y}_p^{\ell' \ell''}$ - объем перевозок промежуточного продукта,
$\xi_j^{\nu \ell}$ - интенсивность использования технологического способа производства,
z_s^{zn} - объем перевозок сырья,
$\tilde{\xi}_\varphi^{\mu z}$ - интенсивность использования технологического способа добычи сырья,
$\delta^{\nu\ell}, \delta^{\mu z}$ - целочисленные переменные отражающие взаимоотношения различных вариантов развития

Как уже отмечалось, условия, накладываемые на переменные имеют вид равенств и неравенств. Условия типа равенств принято, особенно в экономических задачах называть уравнениями баланса. Условия типа неравенств называются ограничениями сверху или снизу. В рассматриваемой задаче удобно задавать все ограничения сразу по группам, реальный смысл и даже названия которых ясны из их естественной экономической интерпретации.

В модели имеются следующие ограничения:

I) перевозки конечного продукта каждого вида и каждому потребителю ограничены снизу потребностями потребителя;

2) баланс между перевозками конечного продукта каждого вида и производством его в каждом пункте производства,
3) баланс между производством промежуточного продукта каждого вида и перевозкой его к каждому потребителю,
4) баланс между производственным потреблением каждого промежуточного продукта и транспортировкой его от каждого пункта производства,
5) локальные ограничения для перерабатывающих предприятий (ограничения для каждого предприятия в отдельности),
6) перевозки сырья каждого вида к каждому потребителю ограничены снизу потребностью потребителя,
7) баланс между перевозками сырья каждого вида и добычей его в каждом пункте добычи,
8) баланс между перевозками сырья каждого вида и производственным потреблением в каждом пункте потребления сырья,
9) локальные ограничения для добывающих предприятий (ограничения для каждого предприятия),
10) глобальные ограничения для добывающих и перерабатывающих предприятий (ограничения для всех предприятий сразу, например на использование трудовых ресурсов, энергии и т.д.),
11) вспомогательные ограничения (отражающие целочисленность переменных $\delta^{\nu e}$ и $\delta^{\mu z}$, взаимоисключение вариантов развития, положительность всех переменных и т.д.).

Критерием оптимальности в приведенной модели является минимизация суммы транспортных, производственных и капитальных затрат с соответствующими коэффициентами дисконтирования.

Попробуем выявить наиболее крупную структуру матрицы рассматриваемой задачи.

Если не считать переменных $\delta^{\nu e}$, $\delta^{\mu z}$ и вспомогательных ограничений, то у нас имеется пять групп переменных и десять типов ограничений, таким образом матрица разбивается на 50 прямоугольных блоков, каждому из которых присвоим номер (a, b), где $a = 1, \dots, 5$; $b = 1, \dots, 10$.

Легко видеть, что в ограничения первой группы входят лишь переменные первой группы, поэтому блоки с номерами (I,2), (I,3), (I,4), (I,5) состоят из одних нулей, в то время как блок (I,I) содержит ненулевые элементы. Аналогично в ограничения второй группы участвуют лишь переменные первой и третьей групп, следовательно чисто нулевыми являются блоки (2,2), (2,4) и (2,5).

Подобные рассуждения можно провести для всех остальных групп ограничений и переменных, например для ограничений восьмой группы нулевыми являются блоки (8,I),(8,2) и (8,5).

Соответствующая блочная структура задачи изображена на рисунке 2. Здесь блоки содержащие ненулевые элементы заштрихованы.

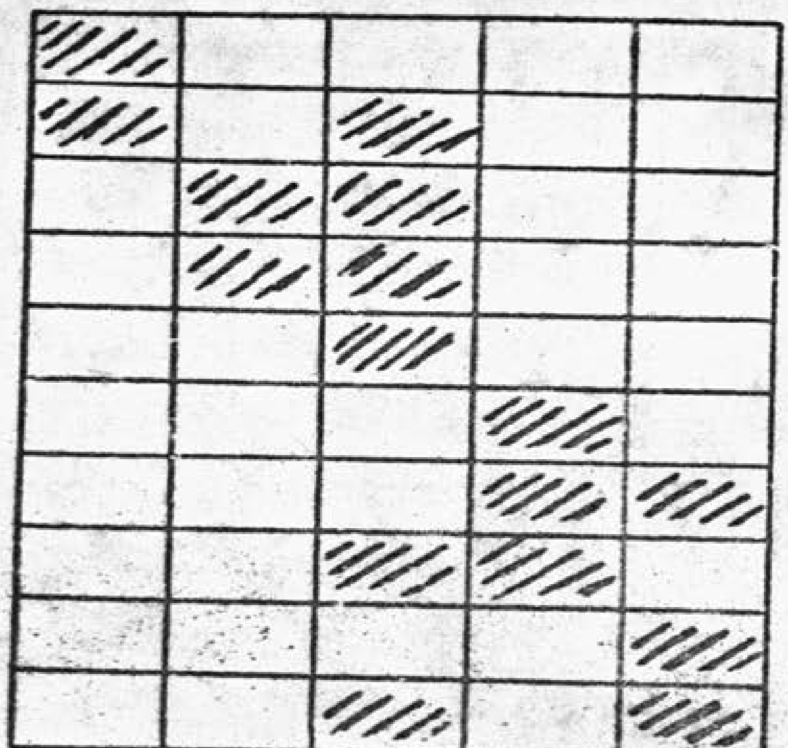


Рис. 2 Блочная структура матрицы задачи развития и размещения производства отрасли.

В настоящей задаче оказывается возможным провести разбиение блоков на более мелкие. Рассмотрим эту процедуру на примере блока (2,3). Для этого переменные третьей группы разобьем на подгруппы, каждая из которых соответствует фиксированному значению ℓ - номера пункта производства конечного продукта. Ограничения второй группы разобьем на подгруппы относящиеся к одному фиксированному пункту производства. Пусть например ℓ принимает значения от I до 5, тогда получится пять подгрупп ограничений и пять подгрупп переменных. Образовавшиеся подблоки занумеруем естественным образом: (a, b), $a = 1, \ldots, 5$; $b = 1, \ldots, 5$.

Очевидно, что переменные из первой подгруппы входят лишь в первую подгруппу уравнений, следовательно подблоки (2,I), (3,I), (4,I) и (5,I) содержат одни нули и т.д. Образовавшаяся структура блока (2,3) изображена на рисунке 3. Она имеет ярко выраженный диагональный вид.

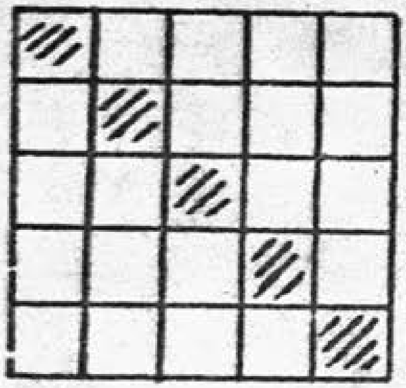


Рис. 3. Детальная структура блока (2,3).

Как уже отмечалось знание структуры матрицы бывает весьма полезным при выборе алгоритма решения соответствующей задачи линейного программирования. Однако основываясь лишь на словесном описании модели и знании диапазона изменения индексов можно уточнить блочную структуру матрицы, дав численные значения размеров всех блоков. Действительно, пусть в некоторой группе переменные имеют по два индекса i и j, которые изменяются от I до I и J соответственно, тогда ясно, что всего переменных в группе $I \cdot J$. Аналогичные рассуждения можно провести и для группы ограничений.

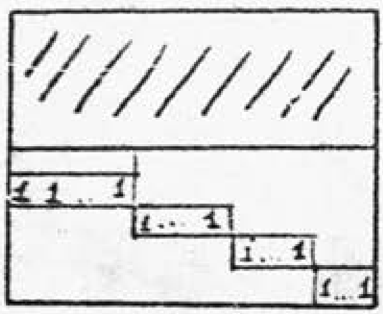
I.2.2. Типовые структурные классы

Описанные в предыдущем пункте методы формального выяснения структуры матрицы задачи ЛП безусловно весьма важны, однако обладают свойством неоднозначности. Действительно, стоит в приведенном примере изменить нумерацию групп ограничений или переменных и картина на рис. 2 сразу изменится. Обычно, на практике, выбор вычислительного метода происходит в зависимости от того к какому из типовых структурных классов относится конкретная матрица.

Можно выделить следующие основные типы структурных классов:

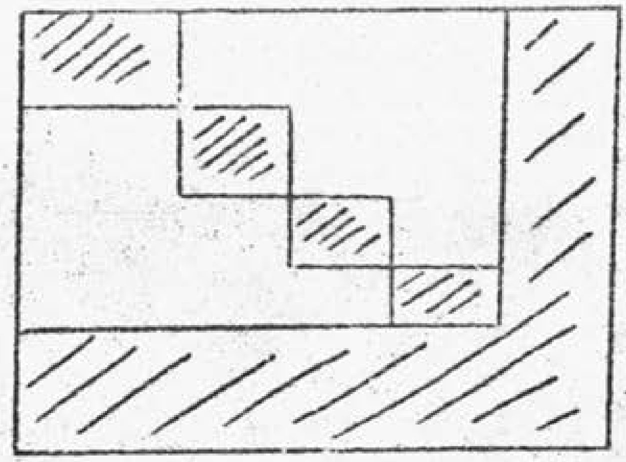
I) двухкомпонентные задачи - это такие задачи, в матрице которых в каждом столбце и в каждой строке имеется лишь два ненулевых элемента. Среди двухкомпонентных задач следует выделить транспортные задачи, у которых ненулевые элементы равны по модулю I,

2) узкоблочные задачи - матрица этой задачи имеет вид

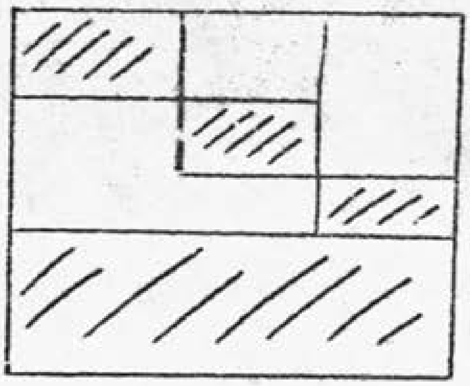


типичным примером задачи такого типа является задача производства несколькими предприятиями заданного количества продуктов с одним локальным ограничением на каждое из предприятий в отдельности,

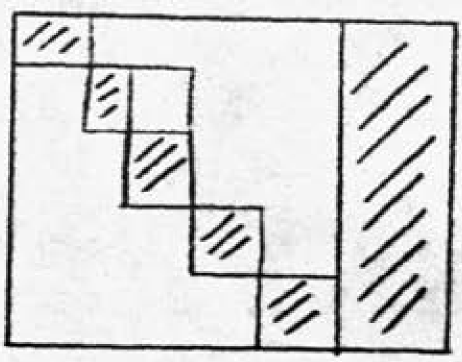
3) диагонально-блочные задачи. Задачи этого типа имеют матрицу вида



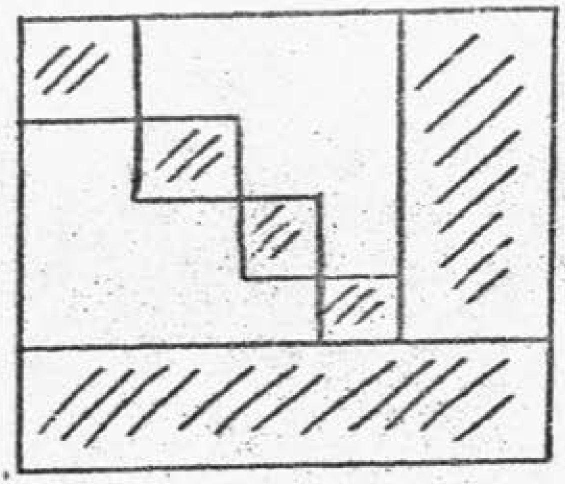
где на незаштрихованных местах стоят нули. Среди диагонально-блочных задач принято выделять задачи с общими ограничениями, матрицы которых имеют вид



и задачи с общими переменными

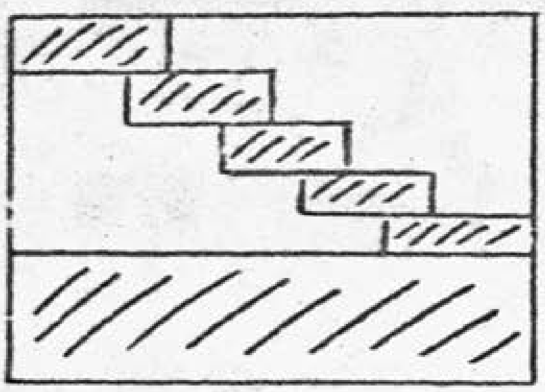


4) производственно-транспортные задачи - задачи вообще говоря также являющиеся подклассом блочно-диагональных. Их матрица, имеющая вид



явным образом распадается на три блока, из которых левый имеет блочно-диагональный вид, правый - транспортного типа, а нижний блок - произвольного вида,

5) динамические задачи - матрица таких задач обычно содержит блок из связанных диагонально подблоков и горизонтальный блок общего вида



Для того, чтобы выяснить принадлежит ли конкретная матрица к тому или иному структурному классу производят перенумерацию групп переменных и ограничений (т.е. перестановку строк и столбцов матрицы) таким образом, чтобы первыми стояли переменные (соответственно ограничения), имеющие производственный смысл, затем имеющие транспортный смысл. Остановимся на некоторых особенностях приведенной классификации. Прежде всего очевидно, что структура матриц может быть сложнее, но как показывает практика, почти всегда удается привести матрицу к блочному виду, относящемуся к одному из перечисленных классов, причем блоки в свою очередь можно разбить на подблоки одним из типовых способов. Тем самым возникает иерархия структур на сложных матрицах.

Отметим также, что большинство задач может быть отнесено одновременно к нескольким из указанных классов, т.е. приведенная классификация оказывается не однозначной. Основная ценность разделения всех задач на структурные классы заключается в том, что для каждого класса существует целый набор вычислительных методов, учитывающих особенности структуры. Знание структуры матрицы оказывается также весьма полезным при подготовке и анализе исходной информации, при проведении вычислительных экспериментов с моделями.

I.3. Описание и классификация некоторых конкретных моделей. Выпишем несколько широко известных экономических моделей, некоторые для иллюстрации полностью, а некоторые сокращенно.

I.3.I. Развернутая межотраслевая динамическая модель. Переменными этой модели являются

$x_j^s(t)$ – объем производства в j -ой отрасли s -ым способом производства году t

$\mu_j^k(\tau)$ – мощности в отрасли j способом производства k, которые начали создаваться в году τ,

$d(t)$ – объем доходов населения в году t.

Отметим, что множество S^j всех технологических способов производства подразделяется на три подмножества $S^j = S_1^j \cup S_2^j \cup S_3^j$, где S_1^j – существующие способы, S_2^j – способы, полученные в результате реконструкции, S_3^j – способы, полученные в результате нового строительства. Таким образом индекс k в переменной $\mu_j^k(\tau)$ пробегает значения из $S_2^j \cup S_3^j$. Условимся считать, хотя это и снизит точность модели, что всякая реконструкция и строительство длится ρ лет. Введем следующие обозначения

$a_{ij}^{s}(t)$ – прямые затраты на производство j -ой продукции в году t способом s ,

$f_j^{s}(t)$ – фондоемкость способа s в году t ,

$d_j^{s}(t)$ – ставки заработной платы в году t ,

$l_j^{s}(t)$ – трудоемкость,

$b_{ij}^{s}(\tau)$ – структура капитальных вложений в s-ый способ производства j -ой отрасли через τ лет после начала строительства или реконструкции,

$c_j^{s}(\tau+p)$ – доля мощностей вводимая в году $\tau+p$,

v_j – коэффициент увеличения стоимости фондов после реконструкции,

$\varphi_j^{s}(t)$ – максимальная доля фондов, возможная для реконструкции,

α – доля доходов населения, получаемых в сфере материального производства,

$u_i \cdot d(t)+\beta_i$ – спрос населения на продукцию i -ой отрасли.

$\hat{Y}_i(t)$ – конечный продукт,

$Y_i(t)$ – чистый конечный продукт,

$L(t)$ – трудовые ресурсы,

$\Phi_j(t)$ – основные производственные фонды, которые могут функционировать в году ,

q_t – коэффициент дисконтирования доходов населения.

Требуется достигнуть максимального значения функционала $\sum_t q_t d(t)$ при выполнении следующих ограничений: балансовых ограничений на производство и потребление

$$\sum_s x_i^{s}(t)-\sum_{j,s} a_{ij}^{s}(t)\cdot x_j^{s}(t)-\sum_{\tau<t}^{\tau=t}\sum_{j,k} b_{ij}^{k}(\tau)\mu_j^{k}(\tau)=\hat{Y}_i(t);$$

условия формирования конечного продукта

$$\hat{Y}_i(t)=u_i\, d(t)+\beta_i+Y_i(t);$$

условия неубывания производства

$$x_i^{s}(t)\le x_i^{s}(t+1),\quad i=1,\dots,n,\quad s\in S_1\cup S_3;$$

ограничения на использование мощностей действующих предприятий

$$f_j^{\lambda}(t)\cdot x_j^{\lambda}(t) \le \Phi_j(t) - v_j \sum_{\kappa\in S_1} \sum_{\tau<t}^{\tau=t} \mu_j^{\kappa}(\tau), \quad \lambda\in S_1, \; j=1,\dots,n;$$

ограничения на появление реконструируемых мощностей

$$f_j^{\lambda}(t)\cdot x_j^{\lambda}(t) - \sum_{\tau+p<t}^{\tau+p=t} \sum_{\kappa\in S_2} c_j^{\kappa}(\tau+p)\cdot \mu_j^{\kappa}(\tau) = 0, \quad \lambda\in S_2, \; j=1,\dots,n;$$

ограничения на появление вновь построенных мощностей

$$f_j^{\lambda}(t)\cdot x_j^{\lambda}(t) - \sum_{\tau+p<t}^{\tau+p=t} \sum_{\kappa\in S_3} c_j^{\kappa}(\tau+p)\cdot \mu_j^{\kappa}(\tau) = 0, \quad \lambda\in S_3, \; j=1,\dots,n;$$

ограничения на объем реконструкции

$$\sum_{\kappa\in S_2} \mu_j^{\kappa}(t) \le \varphi_j(t)\cdot \Phi_j(t), \quad j=1,\dots,n;$$

балансовые ограничения доходов

$$\sum_{j,\lambda} d_j^{\lambda}(t)\cdot x_j^{\lambda}(t) - \alpha\cdot d(t) = 0;$$

ограничения на трудовые ресурсы

$$\sum_{j,\lambda} \ell_j^{\lambda}(t)\cdot x_j^{\lambda}(t) \le L(t);$$

условия положительности переменных

$$x_j^{\lambda}(t) \ge 0; \quad \mu_j^{\kappa}(\tau) \ge 0; \quad d(t) \ge 0.$$

Если классифицировать эту модель, то по интерпретированной классификации по уровню рассматриваемых объектов она относится к первому классу - динамические народнохозяйственные модели. По структурной классификации модель относится к классу динамических задач.

Более подробное изложение свойств приведенной модели можно найти например в [2] или в [21].

I.3.2. Динамический межотраслевой баланс.

Задачи в балансовой постановке не являются оптимизационными, однако их широкая распространенность и применение во многих экономических моделях заставляет нас рассмотреть некоторые формулировки.

Статическая задача межотраслевого баланса в простейшем варианте ставится следующим образом [7] : пусть имеется n производств $P_1, \dots, P_n$, каждое из которых производит один какой-либо продукт в количестве ξ_i , $i = 1, \dots, n$. Заранее известно необходимое количество η_i конечной продукции производства P_i , известна также матрица технологических коэффициентов $A = (a_{ij})$, которая показывает какое количество i -го продукта расходуется на производство единицы j -го продукта. Требуется определить вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ при известной матрице A и векторе $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Известно, что решение этой задачи существует и единственно если матрица A продуктивна, т.е. $A \geqslant 0$ и существует вектор $\bar{x} > 0$ такой, что вектор $\bar{y} = (1-A)\cdot\bar{x} > 0$.

Естественно, что этот вариант может быть значительно дополнен рассмотрением в модели добавочных переменных (например, вариантов производства) и добавочных ограничений (например, ограничения по ресурсам).

В настоящее время получила широкое распространение модель динамического межотраслевого баланса, сформулированная впервые Матиловым в [33] и рассматривающаяся, например в [2] и [14] . Переменными в этой модели являются объемы производства i -ой отрасли за t -й период $x_i(t)$, объем накопления продукции i -ой отрасли в производственных фондах j -ой отрасли за t -й период $y_{ij}(t)$, постоянный для всех периодов темп роста непроизводственного потребления продукции j -ой отрасли q_j .

Ограничения модели содержат для каждого года планируемого периода следующие уравнения.

I) уравнения материальных балансов средств производства для каждой отрасли с учетом накопления и производственного потребления,

2) условия накопления основных производственных фондов по каждой отрасли, учитывающие минимальный необходимый рост основных фондов,

3) условия выбора долевой структуры производства предметов потребления по каждой отрасли,

4) общее для всех отраслей уравнение баланса трудовых ресурсов.

В ограничения входят также соотношения связывающие величины основных производственных фондов для фондообразующих отраслей (в модели это строительство и машиностроение), в текущем году с фондами в предыдущем году планового периода.

Описанная модель использовалась в ИЭ и ОПП СО АН СССР для проведения расчетов темпов и пропорций развития народного хозяйства СССР. Модель имеет достаточно хорошее программное обеспечение, накоплен опыт вариантных расчетов по 29 отраслям материального производства, имеется программа по 180 отраслям.

I.3.3. Статическая межотраслевая межрайонная модель

Модель, применявшаяся для экспериментальных расчетов в конце 60-х - начале 70-х годов в ИЭ и ОПП СО АН СССР, включает в себя следующие ограничения:

I) районные межотраслевые балансы производства и распределения продукции, предусматривающие возможность выбора оптимальных взаимосвязей между отраслями и экономическими районами,
2) балансы наличия и использования трудовых ресурсов по каждому экономическому району и всей стране в целом,
3) ограничения на фонд капитальных вложений по каждой фондообразующей отрасли с учетом лимита капиталовложений по всей стране в целом.

Задача заключается в том, чтобы максимизировать общий объем непроизводственного потребления при выполнении всех приведенных ограничений.

По своей блочной структуре задача относится к классу производственно-транспортных.

По уровню применения, данная модель может быть отнесена к классу задач промежуточных между народнохозяйственными и межрайонными моделями, так как она включает в себя особенности и тех и других.

По этой модели проводились обширные экспериментальные расчеты, которые показали хорошую согласованность полученных результатов с реальными цифрами по народному хозяйству. Подробно результаты машинных экспериментов изложены в [31].

I.3.4. Многоэтапные модели размещения

Непосредственно к классу межрайонных моделей относятся так называемые многоэтапные модели. Суть их заключается в том, что весь процесс производства подразделяется на этапы включающие в себя добычу сырья, производство из сырья продукта следующих порядков и наконец, производство конечного продукта. Например, производство в черной металлургии хорошо укладывается в предлагаемую схему. Действительно, сначала происходит добыча угля и руды, затем производство кокса и рудного концентрата, затем производство чугуна, стали и, наконец проката.

В многоэтапной модели размещения предполагается, что каждый этап производства происходит на отдельном предприятии, причем известны транспортные затраты. В ограничения модели входят балансовые ограничения по каждому пункту производства, потребления и добычи продукта каждого порядка, учитывающие перевозки продуктов. Входят также ресурсные ограничения по ресурсам каждого вида и каждому пункту.

Прямое построение матрицы соответствующей задачи линейного программирования приводит к матрице большой размерности и, что особенно важно, весьма сложной заполненности. Для упрощения структуры матрицы применяется так называемый метод фиктивной диагонали, который заключается в том, что вводится фиктивный продукт, который не может перевозиться между предприятиями, а самому предприятию достающийся даром. Таким способом задачу удается свести к обычной транспортной задаче. Подробно о применении многоэтапных моделей в реальных расчетах сказано, например в [29]

I.3.5. Модель многоотраслевого комплекса

В разделе I.2.I была приведена типовая модель развития и размещения производства отрасли по добыче и переработке сырья. Подобная типовая модель может быть построена и для многоотраслевого комплекса. Индексами переменных этой модели, см.например [2], являются

s – номер отрасли, $s \in S$;
r – номер района, $r \in R$;
l – номер пункта производственного потребления или производства продукции, $l \in L_{sr}$;
ν – номер варианта развития предприятия, $\nu \in V_s$;

L_{sr} – множество пунктов производства s-ой отрасли в r-ом районе;

K_{sr} – множество пунктов конечного потребления продукции s-ой отрасли в r-ом районе;

V_s – множество вариантов развития предприятий s-ой отрасли;

Переменными модели являются

$z^{srl}_{s'r'l'}$ – объемы перевозок продукции предприятия с индексами s, r, l на предприятие с индексами s', r', l'.

y^{sr} – объем конечного потребления продукции s-ой отрасли в r-ом районе,

$\xi^{srl\nu}$ – интенсивность ν-го варианта производства на l-ом предприятии s-ой отрасли в r-ом районе,

$\delta_{srl\nu}$ – целочисленная переменная, отражающая взаимоисключаемость вариантов развития предприятий.

В модели считаются известными следующие величины:

$A^{srl\nu}$ - матрица нормативов (выпуска продукции на l-ом предприяти s-ой отрасли в r-ом районе при ν-ом варианте развития предприятия при работе с единичной интенсивностью,

$\bar{A}^{srl\nu}$ - матрица нормативов производственного потребления на l-ом предприятии s-ой отрасли в r-ом районе при ν-ом варианте развития предприятия при работе с единичной интенсивностью,

$\left.\begin{matrix} G^{srl\nu} \\ \bar{G}^{srl\nu} \\ \bar{\bar{G}}^{srl\nu} \end{matrix}\right\}$ - матрицы нормативов использования соответственно глобальных, отраслевых и районных ресурсов,

$F^{srl\nu}, \bar{F}^{srl\nu}$ - матрицы нормативов использования локальных ресурсов, которые ограничены соответственно для s-ой отрасли в r-ом районе и для l-го предприятия s-ой отрасли в r-ом районе,

$g, \bar{g}^{s}, \bar{\bar{g}}^{r}$ - вектора ограничений соответственно глобальных отраслевых и районных ресурсов,

$f^{sr}, \bar{f}^{srl}$ - вектора ограничений ресурсов, которые ограничены для s-ой отрасли в r-ом районе и для l-го предприятия s-ой отрасли в r-ом районе

y^{r} - вектор конечного потребления в r-ом районе,

Требуется при соблюдении следующих условий:

условия на удовлетворение конечного потребления за счет перевозок:

$$\sum_{\substack{r\in R \\ l\in L_{sr} \\ l'\in L_{sr'}}} z^{srl}_{sr'l'} \geq y^{sr'} \quad , \quad s\in S, r'\in R;$$

условия по балансу производственного потребления продукции на каждом предприятии и перевозок продукции каждой отрасли

$$\sum_{\substack{s\in S\\ r\in R\\ l\in L_{sr}}} Z^{srl}_{s'r'l'} = \sum_{v\in V_{s'}} \bar{A}^{s'r'l'v} \cdot \xi^{s'r'l'v}, \quad \begin{matrix} s'\in S\\ r'\in R\\ l'\in L_{s'r'} \end{matrix};$$

условия по балансу производства продукции на каждом предприятии и перевозок продукции каждой отрасли:

$$\sum_{\substack{s'\in S,\, r'\in R,\\ l'\in L_{s'r'}\cup K_{s'r'}}} Z^{srl}_{s'r'l'} = \sum_{v\in V_s} A^{srlv} \cdot \xi^{srlv}, \quad \begin{matrix} s\in S\\ r\in R\\ l\in L_{sr} \end{matrix};$$

условия на производственное потребление глобальных, отраслевых и районных ресурсов:

$$\sum_{\substack{s\in S,\, r\in R\\ l\in L_{sr},\, v\in V_s}} G^{srlv} \cdot \xi^{srlv} \le g;$$

$$\sum_{\substack{r\in R\\ l\in L_{sr}\\ v\in V_s}} \bar{G}^{srlv} \cdot \xi^{srlv} \le \bar{g}^{s}, \quad s\in S;$$

$$\sum_{\substack{s\in S\\ l\in L_{sr}\\ v\in V_s}} \bar{\bar{G}}^{srlv} \cdot \xi^{srlv} \le \bar{\bar{g}}^{r}, \quad r\in R;$$

условия на производственное потребление ресурсов, которые ограничены для s -ой отрасли в r -ом районе и для l -го предприятия s -ой отрасли 2 -ом районе:

$$\sum_{\substack{l\in L_{sr}\\ v\in V_s}} F^{srlv} \cdot \xi^{srlv} \le f^{sr}, \quad s\in S,\ r\in R;$$

$$\sum_{v\in V_s} \bar{F}^{srlv} \cdot \xi^{srlv} \le \bar{f}^{srl}, \quad s\in S,\ r\in R,\ l\in L_{sr};$$

вспомогательные условия отражающие взаимоисключительность вариантов, положительность переменных и т.д.,

максимизировать функцию народнохозяйственной эффективности $W = \sum_{r \in R} U_r(y^r) + F(z, \xi, \delta)$.

Здесь $U_r(y^r)$ – целевая функция потребления по всем видам конечного продукта для r -го района,

$$F(z,\xi,\delta) = \sum_{\substack{s \in S,\, r \in R,\\ \ell \in L_{sr},\, \nu \in V_s}} \left(E \cdot K_{sr\ell\nu} \delta_{sr\ell\nu} + C^{sr\ell\nu} \cdot \xi^{sr\ell\nu} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{s s' \in S,\, r, r' \in R\\ \ell \in L_{sr},\, \ell' \in L_{s'r'} \cup K_{sr}}} \bar{C}^{sr\ell}_{s'r'\ell'} Z^{sr\ell}_{s'r'\ell'},$$

где $K_{sr\ell\nu}$ – объем капитальных вложений в ℓ-ое предприятие s -ой отрасли r -го района при выборе ν -го варианта развития, E – коэффициент приведения капитальных вложений, $\bar{C}^{sr\ell}_{s'r'\ell'}$ – вектор удельных текущих затрат, $\bar{C}^{sr\ell}_{s'r'\ell'}$ – вектор удельных транспортных затрат.

Приведенная типовая модель многоотраслевого комплекса по виду своей матричной структуры относится к производственно-транспортным задачам. В [2] приведена структура матрицы этой задачи в одном частном случае.

Литература

I. Мартынов Г.В. "Модель развития и размещения производства отрасли с квадратичным критерием оптимальности". Экономика и математические методы. т.IO. вып. I, 1974.

2. Книга "Система моделей оптимального планирования" под ред. Федоренко Н.П., М., 1975.

3. Багриновский К.А. "О согласовании решения комплекса задач оптимального планирования". Материалы первой конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. М., 1971.

4. Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. "Нелинейные сетевые транспортные задачи", М., 1972.

5. Книга "Моделирование народнохозяйственных процессов", под ред. Дадаяна В.С. М., 1973.

6. Мартынов Г.В. "Локальный критерий и практические приемы построения его начального приближения". Экономика и математические методы, 1973, т.IX, вып.3.

7. Браверман Э.Н. "Математические модели планирования и управления в экономических системах", М., 1976.

8. Нестеров Е.П. "Транспортные задачи линейного программирования", М., 1971.

9. Фаерман Е.Ю. "Проблемы долгосрочного планирования", М., 1971.

IO. Макаров В.Л., Маршак В.Д., Фефенов В.Ф., "Алгоритм формирования оптимизационных динамических моделей "затраты-выпуск". в сборнике "Алгоритмы и программы для народнохозяйственных моделей", Новосибирск, 1971.

II. Попов И.Г. "Математические методы в планировании отраслей и предприятий". М., 1973.

I2. Анчишкин А.И. "Прогнозирование роста социалистической экономики", М., 1973.

I3. Книга "Научные основы экономического прогноза", М., 1971.

I4. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г. "Система моделей народнохозяйственного планирования", М., 1972.

15. Беленький В.З., Волконский В.А.

16. Клоцвог Ф.Н., Ершов Э.Б., Безухов Р.А., Конюс А.А., Абдукулова Г.М. "Модели межотраслевого баланса с элементами оптимизации" "Экономика и математические методы, 1971, том XII, вып.5.
17. Клоцвог Ф.Н., Новиков В.А. "Методология прогнозирования экономического развития СССР", М., 1971.
18. Гранберг А.Г. "Оптимизация территориальных пропорций народного хозяйства", М., 1973.
19. Албегов М.М., Солодиков Ю.И. "Вопросы оптимизации размещения системы промышленных комплексов.
20. Баранов Э.Ф. "Динамические модели территориального планирования", М., 1972.
21. Коссов В.В. "Межотраслевые модели", М., 1973.
22. Сатерсовский Л.М. "Межотраслевые модели территориального планирования", Вильнюс, 1973.
23. Казакевич Д.М. "Производственно-транспортные модели в перспективном отраслевом планировании", М., 1972.
24. Книга "Оптимизация отраслевых систем", Новосибирск, 1974.
25. Алексеев А.М., Волконский В.А. "Методы оптимизации планов путем автоматического формирования плановых вариантов и их применение", Экономика и математические методы. 1973, том IX, вып.1.
26. Анчишкин А.И. "Проблемы долгосрочного планирования развития народного хозяйства СССР", М., 1976.
27. Аганбегян А.Г. "Использование народнохозяйственных моделей в планировании", М., 1975.
28. Пугачев В.Ф., Мартынов Г.В., Медницкий В.Г., Пителин А.К. "Многоступенчатая оптимизация с локальным критерием общего вида", Экономика и математические методы, 1972, том VIII, выпуск 5.
29. Федоренко Н.П. "Экономико-математические модели", М., 1969.
30. Сборник "Моделирование формирования территориально-производственных комплексов", Новосибирск, 1971.

31. Гранберг А.Г. "Экспериментальные расчеты оптимального развития и размещения производительных сил СССР", в сборнике "Методы и модели территориального планирования", вып. I, Новосибирск 1971.
32. Беленький В.З., Волконский В.А. "Итеративные методы в теории игр и программировании".
33. Шатилов Н.Ф. "Моделирование расширенного воспроизводства", М., 1976.

ГЛАВА 2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизационные модели и методы играют большую роль в вопросах проектирования и управления большими системами. Они находят приложения в планировании и управлении экономическими процессами, развитии и размещении производства, при разработке инженерных проектов, для оптимального управления сложными автоматическими системами, в военном деле и во многих других областях общественной деятельности. Обширность приложений определяет разнообразие направлений развития оптимизационных моделей и методов. Они являются предметом исследований таких разделов математики как математическое программирование, теория игр, вариационное исчисление, оптимальное управление, теория приближений и др. Заметим, что оптимизационные методы широко используются также и внутри самой математики (конструктивная теория функций, математическая статистика).

Для создания пакета программ по методам оптимизации полезно иметь классификацию этих методов. Здесь будет предложен возможный вариант верхней части классификационного дерева, обрывающийся на узлах, соответствующих отдельным разделам математики, изучающих оптимизационные методы, таким, как математическое программирование, оптимальное управление, стохастическое программирование и т.п. На верхнем уровне классификации целесообразно проводить классификацию по типам моделей, поскольку именно модели этого уровня определяют, в основном, характер применяемых для их анализа методов решения. Так, методы решения задач оптимального управления, теории игр или выпуклого программирования сильно разнятся, что объясняется, в первую очередь, тем, что соответствующие модели имеют существенные различия.

Здесь при построении классификационного дерева моделей основное внимание уделяется той ветви, которая ведет к узлу, соответствующему математическому программированию. Выделяются основные разделы математического программирования. Остальные ветви не детализируются.

Для создания единой классификационной схемы оптимизационных методов естественно опираться на свойства, присущие всем оптимизационным задачам и выделяющие их из множества математических проблем. В то же время различные проявления этого свойства, присущие всем оптимизационным задачам и выделяющие их из множества математических проблем. В то же время различные проявления этого свойства в рамках оптимизационных моделей должны определять разные классы задач. Представляется, что таким свойством является широко понимаемая конфликтность. Конфликтные ситуации возникают в случаях, когда вступают во взаимодействие несколько сторон, наделенных различными интересами и возможностями выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами.

В случаях, когда изучается система, части которой (стороны) имеют самостоятельные, иногда и прямо противоположные интересы, конфликт налицо. Однако даже в случае единства целей у подсистем возникают вопросы, подобные распределению ограниченных ресурсов между частями системы, что также можно рассматривать как конфликтную ситуацию. Если система подчинена единому руководству и ресурсы распределяются централизовано, то конфликтность проявляется в том, что на систему влияют внешние факторы, не находящиеся в распоряжении системы, однако существенно влияющие на эффективность ее действия. Например, такими факторами являются природные условия (скажем, по отношению к системе сельскохозяйственного производства); здесь внешняя сторона не имеет собственных интересов. Другим примером является игра в шахматы, где внешними факторами являются ходы противника, интересы которого прямо противоположны интересам играющего.

Анализ оптимизационных моделей, изучаемых в различных разделах математики, позволяет выявить в любой из них подобные конфликтные ситуации, которые вместе с наличием интересов (целей) отдельных сторон исследуемой системы определяют сам оптимизационный характер задачи. Математической дисциплиной, изучающей вопросы принятия оптимальных решений в условиях конфликта, является теория игр. В связи с этим естественно попытаться классифицировать оптимизационные модели с точки зрения игрового подхода, выводя отдельные разделы оптимизации как частные случаи широко понимаемой теории игр. Основы такого подхода были заложены в работах Ю.Б.Гермейера [1,2].

Теория игр изучает модели принятия решений в конфликтных ситуациях и методы их количественного анализа. В конфликте участвуют различные стороны, называемые игроками, интересы которых различны, но не обязательно противоположны. Интересы игроков отражают в игровых моделях критерии эффективности, задаваемые функциями, функционалами или, в общем случае, операторами. В соответствии с критериями эффективности игроки выбирают стратегии поведения, определяющие конечный результат игры. Возможные исходы игры называются ситуациями. Учет таких внешних, неконтролируемых, факторов, как неопределенность и стохастика интерпретируется как конфликт стороны, принимающей решения, с природой. Внутренние, или контролируемые факторы находятся в распоряжении игроков, которые могут выбирать их из некоторого множества допустимых значений. Участвующие в конфликте стороны могут заключать соглашения, вступая в коалиции. Выигрыш коалиции распределяется между ее членами (дележ) по заранее согласованным ими правилам.

Из всех сторон выделяется основная, которая называется оперирующей. Вслед за Гермейером, будем считать, что исследователь, принимающий решения, принадлежит оперирующей стороне. Исследователь обладает информацией о стратегиях и целях игроков, возможно, отличной, но не превосходящей информацию оперирующей стороны. Интересы оперирующей стороны выделяются. Ниже ей приписывается индекс 0.

Дадим формальное описание игровой модели общего вида. Пусть $\mathcal{J}$ - множество индексов игроков; $\mathcal{J}$ - конечно или счетно и $0 \in \mathcal{J}$. Пусть заданы абстрактные топологические пространства E_i, Ω_i и Λ_i с элементами $x^i \in E_i$, $\omega^i \in \Omega_i$, $\lambda^i \in \Lambda_i$, $i \in \mathcal{J}$. Элемент x^i отражает контролируемые факторы i-го игрока, ω^i - уже упоминавшиеся неконтролируемые факторы, а λ^i характеризует неопределенность цели i-го игрока. Формально элементы ω^i и λ^i не отличаются, однако λ^i выделены из-за специфики их происхождения с тем, чтобы с их помощью конструировать модели в случаях различной степени определенности целей игроков. Их вариация приводит к различным моделям, и в классификационных целях такое выделение существенно.

Пусть $X=\{x^i, i\in J\}$. Критерий эффективности i-го игрока определяется оператором

$$W_i(x, \omega^i, \lambda^i), \qquad (1)$$

действующим из пространства $E\times\Omega_i\times\Lambda_i$, где $E=\prod_{i\in J} E_i$ в некоторое абстрактное пространство Z. В большинстве моделей элементы x^i либо конечномерные векторы, либо функции (не обязательно непрерывные), а W_i - функции либо функционалы, либо наборы функционалов.

В $E=\prod_{i\in J} E_i$ задано замкнутое множество X. Условие $x\in X$ определяет возможности выбора игроками контролируемых факторов x^i. Как правило,

$$X=\prod_{i\in J} X_i \qquad (2)$$

где $X_i\subset E_i$. В случае, когда (2) не выполняется, иногда можно освободиться от взаимосвязи контролируемых факторов, если положить $W_i(x)=-\infty$ при $x\in R\setminus X$ где $R=\prod_{i\in J} R_i$, а R_i - проекция X на E_i. Тогда x^i можно менять независимо от стратегий других игроков, и выход за пределы X будет противоречить интересам игроков. Однако в ряде постановок зависимость факторов x^i, задаваемая условием $x\in X$, является существенной. В этих случаях требуются дополнительные соглашения, а результат игры, как правило, зависит от очередности ходов.

Для классификации игровых моделей можно выделить ряд основных характеристик, каждая из которых допускает различные реализации. Фиксация реализаций этих характеристик приводит к моделям определенного класса. Следует отметить, что при произвольном сочетании реализаций характеристик могут получиться внутренне противоречивые модели либо модели, в которых использование традиционных понятий приводит к противоречиям. Существует мнение, что теория игр не применима к таким ситуациям. Однако при широком взгляде на теорию игр как дисциплину, изучающую конфликтную ситуацию, следует признать ее пока еще недостаточную теоретическую проработанность и стремиться к разрешению противоречий путем отказа от ряда устоявшихся понятий и разработки новых принципов оптимальности поведения игроков. Так, многие модели Ю.Б.Гермейера, имеющие важные практические приложения, были построены в результате отказа от применения смешанных стратегий в ситуациях с отсутствием точек равновесия в чистых стратегиях; применение же смешанных стратегий в этих ситуациях (например, при единственной реализации игры) являлось необоснованным с точки зрения здравого смысла.

Список приводимых ниже характеристик не претендует на полноту, особенно в части описания возможных реализаций. Однако он достаточен для построения приводимого здесь классификационного дерева задач.

Основные характеристики игровых моделей

I. Выбор принципа оптимальности поведения игроков.

а) Выбор точек Парето, или эффективных точек (точка $x \in X$ эффективна, если не существует такой $\tilde{x} \in X$, что $W_i(\tilde{x}) \geqslant W_i(x)$, $i \in J$, причем хотя бы для одного i неравенство строгое).

б) Выбор максимизирующей точки.

В этом случае каждый игрок основывается на некотором априорном принципе оптимальности поведения. Наиболее распространен и естествен с точки зрения приложений принцип гарантированного результата или принцип осуществимости цели. Согласно этому принципу игрок i максимизирует свой выигрыш в предположении, что его противники (в том числе и бесцелевой "противник" - природа) выберут наихудшие для игрока i стратегии (наихудший ω^i). Этот принцип приводит к задачам нахождения точек "максимина" [1, 2]. При существовании точек равновесия стремление к ним реализуется также с помощью поиска точек максимина. Тем самым, принцип равновесия, как способ примирения конфликтующих сторон, вытекает из принципа гарантированного результата.

Отказ от принципа гарантированного результата связан с введением в модель элементов риска. Применение таких моделей типично для конфликтных ситуаций с небольшим числом реализаций.

2. Выбор критериев эффективности W_0, W_i.

Примеры различных реализаций будут даны ниже при выводе из общей схемы отдельных известных игровых и оптимизационных моделей.

3. Наличие внешних факторов ω^i, λ^i.

4. Степень неопределенности целей игроков.

Реализуется при различных фиксациях λ^i.

5. Вид множества допустимых стратегий X

а) Выполнено условие (2); б) Условие (2) не выполнено, однако зависимость x^i можно устранить корректировкой W_i;

б) Зависимость x^i неустранима.

6. Возможности образования коалиций.

а) Образование коалиций игроков с общими интересами. Обычно $W_0 = \sum_{i \in S} W_i$ для коалиций $i \in S$. В общем случае показатель эффективности коалиций, которой присваивается индекс 0, имеет вид

$$W_0 = \mathcal{F}(\{W_i, i \in S\}).$$

б) Образование информационных объединений. Входящие в объединение игроки договариваются сообщать друг другу информацию о выборе своего поведения (о своей стратегии либо о своих ходах - в позиционных играх).

7. Степень информированности.

Игроки, в частности оперирующая сторона, могут иметь самую различную информацию, от полной до ее отсутствия, относительно целей противников, его стратегий, ходов и др. В играх с природой - это информация о ω^i. Можно также варьировать правила обмена информацией между игроками. Различные модели получаются при разной степени информированности исследователя и оперирующей стороны (см. [2], п. VII).

8. Правила, определяющие порядок ходов (в позиционных играх, т.е. в играх, где стратегия поведения не выбирается заранее до игры, а реализуется постепенно, ход за ходом, в зависимости от возникающей ситуации - например, в шахматах). Эти правила часто бывают связаны с конкретными способами обмена информацией после каждого хода.

9. Число игроков $(|\mathcal{I}|)$.

Как правило, рассматривается конечное число игроков. Важные классы моделей, наиболее полно изученные к настоящему времени, получаются при $|\mathcal{J}| = 1$ и $|\mathcal{J}| = 2$.

10. Повторяемость игры.

В классической теории игр рассматриваются модели, где одна и та же конфликтная ситуация может реализоваться бесконечное число раз. С точки зрения приложений оказалось важным рассмотрение конфликтных ситуаций с конечным числом реализаций и даже с единственной реализацией.

11. Иерархия игроков.

Реализуется путем конкретного задания $W_0 = \mathcal{F}(\{W_i, i \in S\})$. Позволяет преодолеть ряд принципиальных затруднений в коалиционных играх. Игроки не объединяются полностью под знаменем единого критерия, а лишь едины в достижении некоторой цели, оставляющей достаточно простора для выбора их стратегий.

12. Число стратегий.

13. Выбор стороны, которой принадлежит исследователь (см. [2]).

Покажем, как вытекают из общей модели при фиксации реализаций перечисленных характеристик отдельные широко известные игровые и оптимизационные модели. Везде, кроме особо оговариваемых случаев, W_i являются функциями, а $\mathcal{J}$ конечно.

1) <u>Антагонистические игры двух лиц.</u>

При $|\mathcal{J}| = 2$ и фиксированных ω^0, ω^1 получаем игру двух игроков с критериями $W_0(x^0, x^1, \lambda^0)$, $W_1(x^0, x^1, \lambda^1)$. При фиксированных λ^0, λ^1 и $W_1(x^0, x^1) = -W_0(x^0, x^1)$ получаем антагонистическую игру двух лиц (с тем лишь добавлением, что исследователь принадлежит одной из играющих сторон; это добавление, впрочем, находится в полном соответствии с прикладными аспектами игры). Если множества стратегий игроков конечны, игра сводится к <u>матричной</u>. Во всех случаях число реализаций игры считается бесконечным.

2) Бескоалиционная игра n лиц.

Здесь $|\mathcal{J}| = n + 1$; критерии игроков $i = 1, \ldots, n$ есть $W_i(x^1, \ldots, x^n, \lambda^i)$; ω^i фиксированы.

Исследователь (оперирующая сторона) играет роль арбитра; x^0 отсутствует. Последний факт означает, что оперирующая сторона непосредственно не воздействует на игру. Вид W_0 определяется способом арбитража.

Стремление к точкам равновесия реализуется выбором

$$W_0 = \sum_{i=1}^{n} \left[W_i(x^1, \dots, x^n) - \max_{x^i} W_i(x^1, \dots, x^n) \right]$$

3) Выбор в качестве решений точек Парето в случае неотрицательности W_i эквивалентен общей модели с

$$W_0(x) = \begin{cases} \min\limits_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i W_i(x), & \text{если } \min\limits_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i W_i(x) < Z = \max\limits_{x} \min\limits_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i W_i(x) \\ Z + \sum\limits_{i \in \mathcal{J}} W_i(x), & \text{если } \min\limits_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i W_i(x) = Z \end{cases}$$

где вектор $\lambda = \{\lambda_i, i \in \mathcal{J}\}$ неопределен (см. [2]).

4) Стохастическое программирование.

В случае совпадения целей игроков - при $W_i \equiv W_0$, $\omega^i = \omega^0$, $\lambda^i = \lambda^0$, $i \in \mathcal{J}$ система описывается стремлением к увеличению значения

$$W_0(x; \omega^0, \lambda^0).$$

На параметры управления x могут быть наложены ограничения, $x \in X$. Модели стохастического программирования можно представлять себе как игры оперирующей стороны с природой. Дальнейшая детализация и квалификация моделей стохастического программирования может быть извлечена из [4] .

5) <u>Многокритериальная оптимизация</u>.

Здесь W_i, $i \in \mathcal{J}$ являются операторами. Как и в 4), предполагается $W_i \equiv W_0$, $\omega^i = \omega^0$, $\lambda^i = \lambda^0$. При фиксированных ω^0, λ^0 получаем оптимизационную многокритериальную задачу. Решениями такой задачи являются эффективные точки.

В целях последующей классификации моделей приведем детализированную постановку этой задачи. Пусть X, Z, Y произвольные топологические пространства. Заданы операторы $W: X \to Z$ и $G: X \to Y$, замкнутое множество M , $M \subset X$ и телесные конуса $\mathcal{K}_Y$ и $\mathcal{K}_Z$ в Y и Z соответственно. Рассматривается задача

$$W(x) \to \sup(\mathcal{K}_z), \quad G(x) \geq 0 \ (\mathcal{K}_y), \quad x \in M, \quad (3)$$

где оптимизация и неравенства понимаются в смысле конусов $\mathcal{K}_z, \mathcal{K}_y$ ($y' \geq y'' \Leftrightarrow y' - y'' \in \mathcal{K}_y$, $y' > y'' \Leftrightarrow y' - y'' \in int\, \mathcal{K}_y$, где $int\, \mathcal{K}_y$ – внутренность конуса $\mathcal{K}_y$).

Формальный вывод (3) из общей игровой модели мало содержателен. В то же время существует более тесная связь задачи (3) с игровыми постановками, а именно с антагонистическими играми. Эта связь выявляется при применении к (3) одного из наиболее распространенных методов количественного анализа многокритериальных задач - метода скаляризации.

Пусть Z^* нормированное пространство, сопряженное с Z. Элементами Z^* являются функционалы u. Тогда $u[W(x)]$ является также функционалом и при фиксированном $u \in Z^*$ можно рассмотреть задачу

$$u[W(x)] \to \sup, \quad x \in X, \quad X = \{x \mid G(x) \geq 0 (\mathcal{K}_y); \ x \in M\}.$$

Выбор функционала u произволен. Естественно воспользоваться принципом гарантированного результата, что приводит к следующей постановке

$$\sup_{x \in X} \{ \inf u[W(x)] \mid u \geq 0, |u| = 1 \} \quad (4)$$

(условие $u \geq 0$ означает, что для всех $z \in \mathcal{K}_z$ $uz \geq 0$)
Задача (4) является частным случаем антагонистической игры двух лиц.

В действительности, связь (3) и (4) является еще более тесной, что будет продемонстрировано для задачи векторной максимизации. Последняя получается из (3) в случае, когда $W = (f_1, \ldots, f_k)^T$, т.е. при $Z = R^k$. Функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ являются критериями эффективности задачи. Один из распространенных подходов для анализа многокритериальных задач состоит в использовании принципа, аналогичного принципу гарантированного результата и заключающегося в стремлении максимизировать минимальное из значе-

ний критериев f_i . (Возражение о несоизмеримости критериев парируется формальным приемом, связанным с их нормировкой $\tilde{f}_i(x) = f_i(x)/\bar{f}_i$, где $\bar{f}_i = \sup\{f_i(x) \mid x \in X\}$
При таком принципе оптимальности (конкретная реализация характеристики I, не описанная выше!) задача (3) сводится к виду

$$V \to \sup, \qquad (5)$$
$$f_i(x) \geq V, \; i = 1, \dots, k, \; x \in X$$

Включив ограничения $f_i(x) \geq V, \; i=1,\dots,k$ в функцию Лагранжа, перейдем к двойственной задаче

$$\inf_{\forall u_i \geq 0} \; \sup_{x \in X, V} \left\{ V + \sum_{i=1}^{k} u_i (f_i(x) - V) \right\} =$$
$$= \inf_{\substack{\forall u_i \geq 0; \\ \sum u_i = 1}} \; \sup_{x \in X} \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(x). \qquad (6)$$

В случае, когда функции $f_i(x)$ выпуклы вверх, область X выпукла и выполнены некоторые естественные условия регулярности, для задач (5) , (6) справедлива теорема двойственности, утверждающая совпадение оптимальных значений этих задач. Отметим, что задача (6) в выпуклом случае совпадает с (4) при $W: X \to R^k$. Таким образом, игровая постановка (6) оказывается эквивалентной исходной модели векторной максимизации в выделенном выше частном, но важном случае.

Приведенные выше соображения показывают, что задачи многокритериальной оптимизации и векторной максимизации можно рассматривать как частный случай игровых моделей, причем достаточно широкий их подкласс выводится из антагонистических игр.

Дальнейшие модели классификационного дерева можно получать из моделей (3), (5). При $k=1$ и $W \equiv f: X \to R^1$ получаем однокритериальную задачу оптимизации. Если $f(x)$ - функционал в некотором пространстве X , то в рамки модели (3) можно уложить все задачи оптимального управления (вариационные задачи с ограничениями на параметры управления). Из других оптимизационных задач в функциональных пространствах задачи оптимального управления выделяются спецификой их происхождения: характеризующие состояние системы параметры (фазовые координаты) являются функциями от времени и подчинены системе дифференциальных (или интегральных) уравнений, с обыкновенными или частными производными (в дискретном случае - системе разностных уравнений). Бесконечномерность этих задач порождена, таким образом, рассмотрением процессов во времени. Оптимизация проводится по параметрам управления, на которые наложены ограничения в форме равенств и неравенств. Могут быть ограничения смешанного типа, в которые наряду с параметрами управления входят фазовые переменные. (Заметим, что задачи оптимального управления со стохастическими параметрами ω в описываемой схеме отнесены к стохастическому программированию, хотя по характеру используемых для их анализа методов они тяготеют к классической теории оптимального управления. Можно было бы фиксировать при переходе к задаче (3) ω^0 , а затем выделять из каждого класса моделей, в том числе и из моделей оптимального управления, подкласс стохастических. Однако представляется, что такой путь привел бы к громоздкой и излишне усложненной схеме).

Если в задаче однокритериальной оптимизации минимизируемый (максимизируемый) целевой функционал является выпуклым (вогнутым), а область допустимых решений X выпукла, получаем задачи выпуклого программирования в функциональных пространствах. Дальнейшая их классификация - по видам пространств. Важным частным случаем выпуклых задач являются задачи линейного программирования в функциональных пространствах.

Если целевой функционал имеет вид $f_1(x)/f_2(x)$ где функционал $f_1(x)$ - вогнутый, $f_2(x)$ - выпуклый, а область допустимых решений X выпукла, получаем задачи дробно-выпуклого программирования в функциональных пространствах. Рассматриваемый класс можно получить непосредственно из задачи (3) многокритериальной оптимизации, если ввести целевую функцию вида

$$\inf_{u/|u|=1} \frac{uF_1(x)}{uF_2(x)} \to \sup,$$

где $F_1(x), F_2(x)$ операторы, действующие из X в Z а u - функционалы из сопряженного пространства Z^*. (Функционалы $f_1(x) = uF_1(x)$, $-f_2(x) = uF_2(x)$ должны быть вогнутыми).

При $X = R^m$ получаем конечномерные задачи математического программирования. Они делятся на два подкласса - многоэкстремальных и одноэкстремальных. В одноэкстремальных каждый локальный оптимум является глобальным. Из многоэкстремальных задач следует выделить наиболее интенсивно изучающиеся задачи дискретного (целочисленного) программирования и задачи вогнутого программирования. В последних максимизируется (минимизируется) на выпуклом множестве выпуклая (вогнутая) функция, так что любая крайняя точка (и только они) может быть точкой локального оптимума.

Из одноэкстремальных задач наиболее изучены задачи выпуклого программирования, в которых максимизируется (минимизируется) вогнута (выпуклая) целевая функция $f(x)$ на выпуклом множестве, задаваемой системой вида

$$g_i(x) \geq 0, \ i \in I_1; \ h_i(x) = 0, \ i \in I_2; \ x \in M,$$

где I_1, I_2 конечны, $g_i(x)$ вогнуты, $h_i(x)$ линейны, а M замкнутое множество простейшего вида (например, $M = \{x \mid \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, n\}$; как правило, $\alpha_j = 0$ $\beta_j = \infty$). Если $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in I_1$ линейны, получаем задачу линейного программирования.

Другой подкласс одноэкстремальных задач - обобщенно-выпуклое программирование - рассматривает задачи минимизации обобщенно-выпуклых функций на выпуклых множествах. Функция $f(x)$ называется обобщенно-выпуклой, или G - выпуклой на выпуклом $C \in R^n$, если для любых $x_1, x_2 \in C$ и $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leq G^{-1}[q_1 G(f(x_1)) + q_2 G(f(x_2))],$$

где G непрерывная строго монотонная функция одной переменной, [5]. Различные виды обобщенно-выпуклых целевых функций - квазивыпуклые, псевдовыпуклые, логарифмически выпуклые, τ- - выпуклые - определяют дальнейшую классификацию этих моделей.

Методам их решения посвящена монография [7] . Частным случаем квазивыпуклых функций являются дробно-выпуклые, из которых, в свою очередь, выделяются дробно-линейные. Методы дробно-линейного программирования развивались наиболее интенсивно.

Промежуточное положение занимают задачи геометрического программирования, [3] . Они не являются одноэкстремальными, однако, задачи, двойственные к широкому их подклассу (задачам с позиномами), принадлежат выпуклому программированию. Такие задачи решаются методами, близкими к методам выпуклого программирования. Однако другие подклассы (например, задачи с сигномиалами, [6] являются существенно многоэкстремальными.

Приведенное описание возможной классификационной схемы оптимизационных моделей иллюстрируется в компактном виде деревом, изображенном на рис. I.

В последующих разделах даны классификации методов решения задач общего вида выпуклого, линейного и целочисленного программирования. Большинство описанных методов выпуклого программирования применимо к общим нелинейным задачам математического программирования, однако, в многоэкстремальных задачах они обеспечивают сходимость только к точкам локального оптимума. Классификация специальных методов решения частных задач математического программирования здесь не приводится.

Классификационное дерево оптимизационных моделей

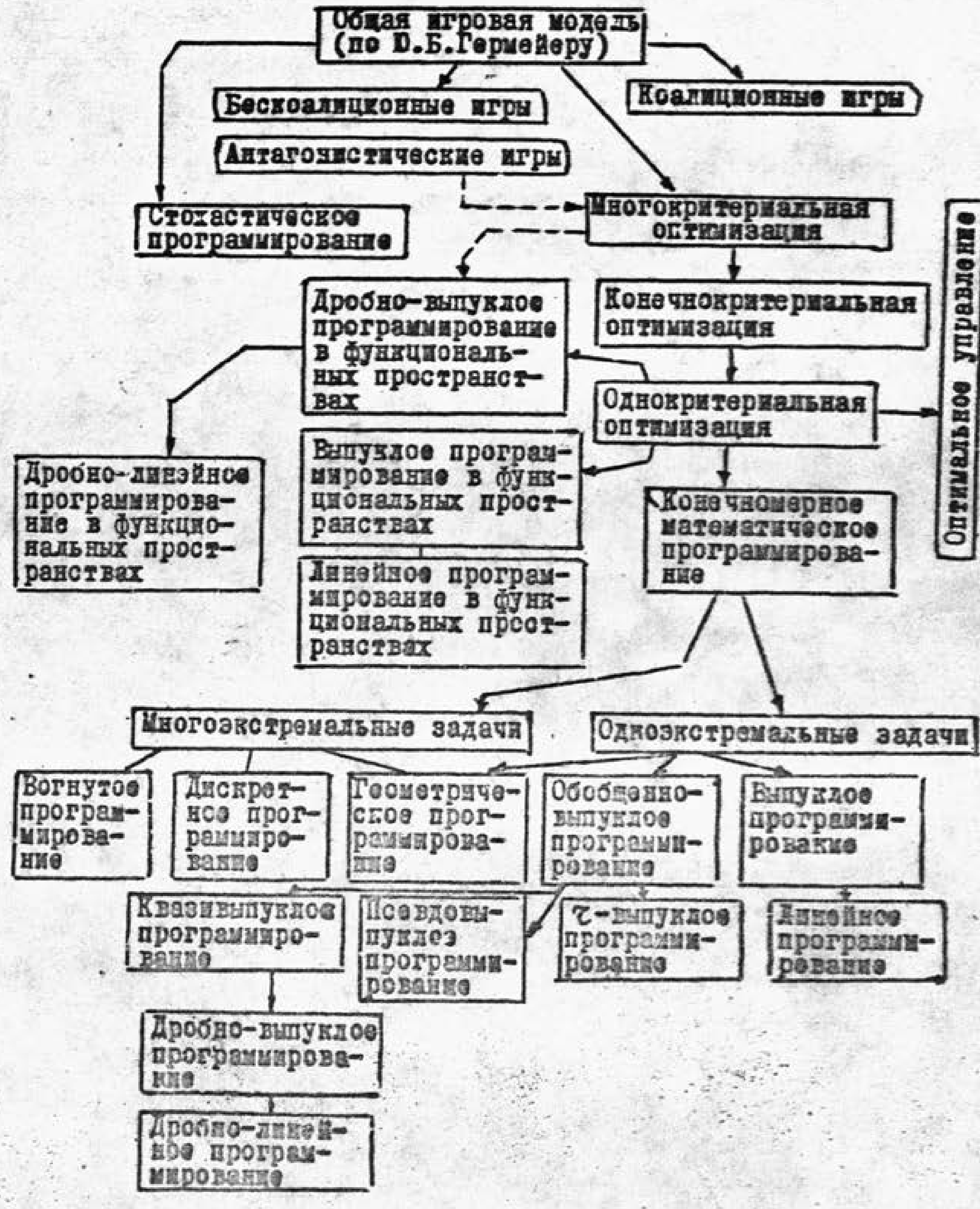


Рис. I

Литература

I Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М., "Наука", 1976.

2 Гермейер Ю.Б. Игровые концепции в исследовании систем.- Сб. "Методы управления большими системами", т.I, Иркутск, 1970, 4-24.

3 Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., "Мир", 1972.

4 Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М., "Сов.радио", 1974.

5 Avriel M., Zang J., Generalized convex functions with applications to nonlinear programming. "Math. Progr. Activity Analysis", Amsterdam, e.a., 1974. 23-33.

6 Duffin R.J., Peterson E.L. Geometric programming with signomials. "Jor. Optimiz. Theory and Appl.", 1973, 11, №1, 3-35.

7 Martos B. Nonlinear programming. Theory and methods., Budapest, 1975. (англ.)

ГЛАВА 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Изучение и анализ деятельности по созданию прикладных программ приводит к выводу о необходимости систематизации программ. Существующий классификатор программ позволяет различать только крупные проблемные области.

Классификация программ в узких областях может быть построена различным способом. Одним из способов является разделение программ по уровню сложности. Можно представить себе спектр программ различной сложности, начиная с небольших, но самостоятельных процедур, кончая многофункциональными программными системами.

Оптимизационные методы прежде всего связаны с узким понятием "прикладной программы". Больше всего это понятие соответствует старому понятию стандартной или типовой программы. Будем считать, что говоря о прикладной программе можно говорить о некоторой задаче, методе, алгоритме.

Очевидно сложность прикладной программы относительна.

Она оказывается простой, если мы используем ее как часть более сложной программы. С другой стороны ее можно считать сложной, если она конструируется из более простых программ.

На сегодняшний день рано говорить о классификации очень сложных прикладных программ, ибо их мало и они уникальны.

Наиболее разумно проводить последовательную систематизацию среди программ средней сложности и среди элементарных программ. При этом наиболее интересна в конечном счете классификация "элементов".

В некоторых узких областях сложилось представление о структуре задач, методов, алгоритмов, которые наиболее представимы в этих областях.

В области математического программирования здесь представлены три раздела: общие задачи линейного программирования, безусловную оптимизацию и целочисленное программирование.

Литература, использованная при классификации приводится в конце каждого раздела.

I. Линейное программирование

Все разделы математического программирования (методы и задачи оптимизации) можно и нужно классифицировать по трем направлениям:

вопросы реализации на ЭВМ;

задачи математического программирования;

численные методы.

I.I. В вопросы реализации на ЭВМ надо вынести все, что присутствует почти во всех алгоритмах и характеризует в первую очередь, программную сторону дела.

Реализация на ЭВМ включает следующие аспекты:

- формы хранения информации,
- организация обмена с внешней памятью,
- устойчивость, надежность, критерии окончания счета,
- типы ЭВМ, языки программирования,
- пакетная организация, модульность,
- сервисные программы, генераторы матриц.

I.2. По задачам раздел "линейное программирование" можно классифицировать так:

А. Общая задача ЛП:

- каноническая форма общей задачи,
- задачи с двухсторонними ограничениями на переменные,
- задачи с узкоблочными ограничениями,
- задачи с переменными верхними ограничениями на переменные,
- параметрические задачи ЛП.

Б. Блочные задачи ЛП:

- блочно-диагональные с горизонтальной связывающей частью,
- блочно-диагональные с окаймлением,
- динамические (с лестничной структурой),
- задачи с вложенной блочной структурой,
- задачи с диагональными блоками специальной структуры.

I.3. По методам и алгоритмам раздел ЛП распадается на следующие части:

А. Конечные общие методы:

- Симплекс метод,
- Алгоритм с обратной матрицей,
- Алгоритм с разложением базисной матрицы на произведение треугольной и ортогональной [1], [17],

- мультипликативный алгоритм,
- треугольный мультипликативный алгоритм,
- компактный мультипликативный алгоритм [7],
- треугольный мультипликативный алгоритм с пересчетом треугольного разложения на итерациях [10], [17],
- треугольный мультипликативный алгоритм с градиентным критерием выбора ведущего столбца [13], [17]

- Метод сокращения невязок.

Б. Конечные блочные методы:

- Алгоритмы, основанные на симплекс методе,
- Алгоритмы с обратной матрицей [4], [5], [6],
- Блочные мультипликативные алгоритмы [8], [15], [16],
- Алгоритмы для задач с вложенной блочной структурой [4],
- Метод сокращения невязок (Алгоритмы одновременного решения прямой и двойственной задачи),
- Алгоритм Балаша [19],

- Методы декомпозиции,
- Алгоритм Данцига-Вульфа (разбиение по горизонтали) [11],

- Алгоритм Розена (разбиение по вертикали), [12]
- Алгоритмы, использующие перераспределения ресурсов,
- Двойственный метод [3]

В. Итеративные методы:

- Метод штрафных функций
- Методы внутренней точки
- Методы внешней точки,

- Прямые методы
- Метод проекции градиента,

- Методы отыскания седловых точек,
- Игровые методы,
- Методы типа Брауна,
- Методы типа Неймана,
- Методы отыскания седловых точек модифицированных функций Лагранжа,
- Метод штрафных оценок [9],
- градиентные методы,
- Итеративные аналоги точных методов,
- аналог метода сокращения невязок [2]

Предложенная классификация методов и алгоритмов ЛП не претендует на полноту и также не является строго последовательной.

В приведенной схеме не нашло отражения что часть итеративных методов имеет модификацию для блочных задач. Например, алгоритм Чурквеидзе для блочных задач является модификацией метода штрафных оценок.

Остались не выделенные среди блочных методов итеративные блочные методы, не имеющие аналога для общей задачи. Например, игровой метод двухстороннего планирования Корнай-Липтика.

Анализ приведенной классификации показывает, что наиболее исследованными и имеющими многочисленные программные реализации являются конечные общие методы. В качестве примера можно привести пакет математического программирования для ЕС ЭВМ, который является типичным коммерческим пакетом. Блочным и итеративным методам посвящено много теоретических работ, но они отстают в смысле завершенности от конечных методов и находятся в стадии экспериментального исследования. По нашему мнению эти методы должны в будущем появиться в составе програмного обеспечения ЕС ЭВМ.

Литература.

1. Булавский В. Метод ортогонализации в линейном программировании. Оптимальное планирование, 15 (1970).
2. Борисова Э. Итеративные программы системы СИМПЛЕКС. Сб. "Программы и алгоритмы", вып. 53, М., 1972, ЦЭМИ АН СССР.
3. Гольштейн Е., Юдин Д. Новые направления в линейном программировании. Изд-во "Советское радио", 1966.
4. Звягина Р. Задачи линейного программирования с матрицами произвольной блочной структуры. ДАН СССР, 1971, т.196, № 4.
5. Ким К. Об использовании специфики условий задачи в методе улучшения плана. ЭММ том. I, вып. I, (1965).
6. Кузиков Л. Декомпозиция блочных задач линейного программирования со слабо связанными блоками. ЭММ, 1973, т.9, вып.4.
7. Малков У. Обзор путей повышения эффективности мультипликативного алгоритма симплекс метода. В сб.ж. ЭММ, 1976.
8. У.Малков, П.Ахметов. Использование специфики условий задачи в мультипликативном алгоритме. ЭММ, 1972, т.8, вып. I.
9. Поляк Б., Третьяков Н. Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум. ЖВМ и МФ, 1973, т. 13, № 1.

2. Безусловная оптимизация

2.1. Классификация задач безусловной оптимизации

Безусловная оптимизация функций конечного числа переменных является одним из подразделов математического программирования. Задачи безусловной оптимизации естественно распадаются на классы, каждый из которых определяется видом функции. К настоящему времени можно привести следующие часто встречающиеся виды функций: квадратичная функция, однородная функция, составная функция, гладкая унимодальная функция общего вида, негладкая функция, функция с неполной информацией о своем значении или градиенте, многоэкстремальная функция.

По каждому классу функций матобеспечение ЭВМ должно содержать набор программ и алгоритмов оптимизации, потому что нельзя указать программы или алгоритма, которые были бы во всех встречающихся случаях самыми эффективными. Вследствие этого необходимо классифицировать методы и алгоритмы оптимизации с указанием области их эффективного использования. Термин "эффективность" часто используется в литературе, но обычно не определяется точно. Как правило его содержание меняется в зависимости от задачи. Укажем небольшой набор компонент, часто входящих в содержание термина "эффективность" метода (алгоритма или программы): порядок, скорость сходимости, требуемый объем памяти ЭВМ, устойчивость к погрешности, область сходимости, задание исходной информации, точность решения, способы прерывания счета и др.

При наличии схемы классификации задач методов и алгоритмов можно указать следующий путь прохождения задачи. По виду функции определяем класс, к которому она принадлежит. Затем определяем термин "эффективность" (из приведенного набора компонент) и выбираем подходящий алгоритм. Классификация, кроме этого, указывает на недостающие методы и необходимость их разработки.

К настоящему моменту наибольший набор методов имеется для класса гладких унимодальных функций общего вида, а также для частных видов гладких функций: квадратичных, однородных, составных. Для последних трех классов функций существуют специальные методы, которые в некотором смысле являются самыми эффективными для данного класса.

Значительно слабее развиты методы оптимизации функций негладких, с неполной информацией и многоэкстремальных. Для этих функций имеется очень ограниченный набор методов, которые мы отнесем к специальным, хотя их нельзя считать эффективными.

Приведем более подробно классы функций и специальные методы их оптимизации, а в следующих параграфах - классификацию методов и алгоритмов гладкой унимодальной функции.

2.I.I. Квадратичная функция.

Квадратичной функцией называется функция вида

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-x^*)^T Q(x-x^*)+f(x^*) \qquad (\mathrm{I})$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, Q - матрица ($n\times n$), x^* - точка оптимума $f(x)$, $f(x^*)$ - значение функции в точке оптимума. Ниже, для определенности, мы будем рассматривать задачу минимизации $f(x)$, поэтому считаем, что Q - положительно определенная матрица.

Задачу определения x^* функции вида (I) можно свести к задаче решения системы линейных уравнений

$$\nabla f(x) = 0 \qquad (2)$$

методы решения которой можно найти, например, в книге Фаддеева Д.К. и Фаддеевой В.Н. [1], а алгоритмы на Алголе - в книге Уилкинсона и Райнша [2] .

2.I.2. Однородная функция

Функция называется однородной степени " m " , если выполняется тождество

$$f(x+t(x-x^*))-f(x^*)=t^m[f(x)-f(x^*)] \qquad (3)$$

Отсюда можно определить, что

$$f(x)=\frac{1}{m}(x-x^*)^T\nabla f(x)+f(x^*) \qquad (4)$$

Нетрудно заметить, что (I) есть однородная функция степени 2. Если продифференцировать (4) и приравнять нулю градиент, то можно определить x^* :

$$x^*=x-(m-1)[\nabla^2 f(x)]^{-1}\nabla f(x) \qquad (5)$$

Здесь при определении x^* требуется знание обратной матрицы вторых производных. В 1972 г. был впервые предложен конечный метод минимизации однородной функции без использования вторых производных, а позднее и целое семейство методов такого типа. Ссылки на эти статьи приведены в обзоре [3] .

2.1.3. Составная функция

Функции вида

$$f(x)=R(\varphi(x)) \qquad (6)$$

называются составными. Частный вид такой функции возникает в задачах средне-квадратичного приближения:

$$f(x)=\sum_{i=m}^{m}\varphi_i^2(x) \qquad (7)$$

(здесь R - квадратичный функционал).
Для минимизации (7) используются различные модификации метода Гаусса-Ньютона. Сведения об этих методах приведены в обзоре [3] .

2.1.4. Негладкая функция

При минимизации негладкой функции большинство методов, рассчитанные на минимизацию гладких функций, расходятся. Поэтому были предложены специальные методы, обзор которых приведен в статье [4] . Среди этих методов можно выделить три группы методов: методы обобщенного градиента, методы использующие растяжение пространства и методы сопряженных направлений.

2.1.5. Функция с неполной информацией о значении функции или градиента

Функции такого типа исследуются в книгах Катковника В.Я. [5] , Ермольева Ю.М., [6] , Растригина Л.А. [7] . Среди методов минимизации этих функций можно указать методы градиентного типа и методы случайного поиска. Однако пока нельзя указать эффективного метода минимизации функции с неполной информацией.

2.1.6. Многоэкстремальная функция

Проблема отыскания глобального минимума поставлена давно. Эта задача обсуждается в книгах Катковника В.Я. [5] , Растригина Л.А. [7]. Однако методы развиты еще слабо. Хотя и существуют отдельные методы глобальной оптимизации, но они либо малоэффективны (случайный поиск, метод проб,), либо не очень надежные (метод тяжелого шарика, методы аппроксимации).

2.2. Классификация методов минимизации гладкой функции

С вычислительной точки зрения важны следующие две характеристики методов. Во-первых, порядок метода (равный наивысшему порядку производной, используемой в вычислениях), и, во-вторых, порядок аппроксимации $f(x)$ при построении следующей итерации. От порядка аппроксимации обычно зависит скорость сходимости метода.

По порядку методы делятся на три группы: методы нулевого порядка, методы первого порядка и методы второго порядка. Методы более высокого порядка обычно не используются из-за большой трудоемкости вычисления производных высокого порядка.

Методы нулевого порядка можно разделить на методы сечений линейные методы и квадратичные методы.

В методах первого порядка естественно выделить линейные методы, n - шаговые квадратичные методы (среди которых методы сопряженных направлений, состоящие из методов сопряженных градиентов, проективных методов, и квазиньютоновских методов) и (n + I) - шаговые кубические методы.

Методы второго порядка составляют различные модификации (расширяющие область сходимости) метода Ньютона.

Кроме приведенных двух основных характеристик методов можно использовать такие факторы как требуемый объем памяти, область сходимости, устойчивость к погрешности и другие, которые используются и при характеристике алгоритмов (под которыми мы понимаем реализацию метода в виде програмы или алгоритма на алгоритмическом языке).

2.3. Классификация алгоритмов

Если просмотреть библиотеки матобеспечения ЭВМ, то по безусловной оптимизации наберется всего несколько программ, да и те не соответствуют современному уровню развития методов. В то же время по некоторым методам написаны алгоритмы и опубликованы в статьях и книгах. Например в статье Е.Н.Белова Б.Т.Поляка и В.А.Скокова [8] приведены ссылки на ряд программ на Алголе, в книге Химмельблау [9] приведены алгоритмы на Фортране и др. Часть этих алгоритмов можно включить в библиотеки ЭВМ, при наличии определенных характеристик.

Аналогично с методами будем различать алгоритмы по порядку: алгоритмы нулевого, первого и второго порядка.

Следующие характеристики алгоритмов (определяющие его эффективность) - скорость сходимости и область сходимости -

часто бывают известными из теории. Однако при реализации метода часто происходят вынужденные отклонения от теоретического метода и поэтому, как правило, проводится численное исследование алгоритмов на тестовых задачах. Поэтому необходимо иметь набор общепринятых тестовых задач, на которых и проводить проверку алгоритмов. Отметим, что при международном журнале "Mathematical Programming" создан комитет по сбору тестовых задач и алгоритмов минимизации. Такую же работу наметило проводить в СССР совещание по алгоритмам и программам (г.Звенигород, XII, 1976).

Существенной характеристикой эффективности алгоритма является требуемый объем памяти ЭВМ.

Приведенные характеристики алгоритмов являются основными. Как правило среди алгоритмов одного из трех классов (алгоритмов нулевого, первого или второго порядка) выбираются алгоритмы, которые имеют широкую область сходимости, высокую скорость сходимости и требует малый объем памяти ЭВМ. В качестве других характеристик алгоритмов используются такие как устойчивость к погрешности вычислений, задание исходной информации, критерии прерывания счета, оценка точности решения.

Примером влияния погрешности на алгоритм может служить реализация метода Гаусса-Ньютона. Вспомогательной задачей этого метода является задача решения системы линейных уравнений, с большим числом обусловленности. Если использовать для этой задачи прямые методы линейной алгебры без модификаций, то метод Гаусса-Ньютона часто расходится.

Для алгоримов минимизации всегда требуется задание алгоритма вычисления функции (и производных для алгоритмов I-го или 2-го порядка) и начального приближения. Но иногда в алгоритмах используются всякие константы, которые нужно подбирать, что вообще говоря, менее желательно.

Если алгоритм минимизации используется как подпрограмма в некоторой программе, то важное значение принимают критерии прорывания счета и оценка полученного решения.

Таким образом алгоритмы безусловной оптимизации можно пока разделить лишь на три класса по их порядку. Упорядочить внутри класса алгоритмы мы не можем. Однако для каждого алгоритма следует иметь результаты счета тестовых задач, иметь сведения об объеме требуемой памяти ЭВМ, о критериях прерывания счета и задании начальных данных. По этой информации и на основании выбранного критерия эффективности для данной задачи можно определить подходящий алгоритм.

На основании этих характеристик следует и пополнять библиотеку алгоритмов, включая новый алгоритм в том случае, если он хотя бы по одной характеристике лучше имеющихся.

Литература

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1963.
2. Уилкинсон, Райнш. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. М., "Машиностроение", 1976.
3. Скоков В.А. Методы и алгоритмы безусловной минимизации функций многих переменных (обзор). Научный отчет ЦЭМИ АН СССР, 1974.
4. Шор Н.З. Обобщенные градиентные методы минимизации негладких функций и их применение к задачам математического программирования. (Обзор). Экономика и мат.методы., т.XII, № 2, 1976, стр. 337-356.
5. Катковник В.Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. М., "Наука", 1976.
6. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования, М., "Наука", 1976.
7. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. М., "Наука", 1968.
8. Белов Е.Н., Поляк Б.Т., Скоков В.А. Комплекс программ оптимизации. Экономика и мат.методы, т.XIII, № 4, 1977.
9. Химмельблау . Прикладное нелинейное программирование. М., "Мир", 1975.

3. Целочисленное программирование

Здесь намечен подход к классификации точных методов решения общей задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). В настоящее время их вычислительные возможности отстают от требований практики и широкое распространение получили приближенные методы [I]. Однако вычислительные возможности точных методов далеко не исчерпаны. С одной стороны, успешное решение отдельных больших задач ЦЛП в США методами Била и Смолла (модификация метода Лэнд и Дойг), методами отсечений и с помощью группового подхода показывают перспективность создания и совершенствования рабочих программ по перечисленным методам. С другой стороны, представляется, что эффективность можно существенно повысить при комплексном использовании методов. Создание единой системы ЭВМ должно способствовать продвижению в этом направлении. Успех на этом пути связан с созданием единообразных гибких программ по основным методам, которые можно было бы объединить в систему и использовать комплексно, строя новые методы при различных сочетаниях основных.

Приводимая классификация может оказаться полезной при создании такой системы. В основу классификации положены различные идеи, используемые при решении общих задач ЦЛП. Методы решения специальных задач, в том числе нелинейных, здесь почти не затрагиваются. Основное внимание уделено методам ветвей и границ. Они классифицируются по нескольким характеристикам. Если построить таблицу, входами которой будут эти характеристики, то отдельные ее позиции будут соответствовать известным методам, другие окажутся не заполненными. Для последних возможно создание нового метода. Построение некоторых из них заведомо нецелесообразно, другие могут оказаться эффективными, эффективность третьих связана с дальнейшим совершенствованием вычислительного аппарата.

Классификация не претендует на полноту. Отдельные ее части детализируются в разной степени – в соответствии с целями и известностью данного направления. Основная цель – не разделить методы, а способствовать их совместному использованию в рамках единой системы.

Задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) заключается в максимизации (минимизации) линейной целевой функции при линейных ограничениях в форме равенств и неравенств, причем отдельно выделены условия неотрицательности переменных. Если требование целочисленности наложено только на часть переменных, – задача относится к классу частично целочисленного программирования (ЧЦЛП). Остальные – полностью целочисленные задачи (ПЦЛП). Если переменные булевы ($x_j = 0, 1$) – задача относится к булеву программированию (БЛП). Отметим, что большинство задач ПЦЛП и нелинейных сепарабельных задач сводится к БЛП, так что класс последних достаточно широк.

Методы ЦЛП образуют 2 основные группы:

А. Методы отсечений,

Б. Комбинаторные методы.

В. Метод разбиения Бендерса ([2], § 15,2), который сводит решение задачи ЧЦЛП к серии задач ПЦЛП.

А. Методы отсечений [2], [3].

Они основаны на решении релаксированной задачи ЛП, т.е. задачи, получаемой из исходной отбрасыванием требований целочисленности, с последующим построением отсечений – неравенств, отсекающих нецелочисленные решения задачи ЛП и удовлетворяющих всем целочисленным допустимым решениям.

АI. Двойственные методы отсечений.

АII. Прямые методы отсечений.

Дальнейшая детализация – по решаемым задачам. Для ПЦЛП применяются I и II алгоритмы Гомори, прямые алгоритмы Юнга, Гловера и Эртякова-Бузыцкого ([4], стр. 68). Для ЧЦЛП – II алгоритм Гомори. Для БЛП – алгоритм Финкельштейна).

АШ. Приведение к виду, удобному для округления (Вотяков, [5]).

Унимодулярными преобразованиями релаксированная задача ЦП приводится к виду, где в нецелочисленной оптимальной точке достигается максимум x_j для всех j ("клин"). Для такой задачи отсечениями являются округления $x_j \leq [x_j^\circ]$ не портящие вид задачи. На конусе такое последовательное округление быстро приводит к цели. В общем случае (многогранного множества) приходится после ряда округлений вновь приводить задачу к требуемому виду. Экспериментальная проверка этого подхода не проводилась.

Методы группы А можно использовать в рамках комбинаторных методов для усиления оценок или решения отдельных подзадач. В задачах групповой минимизации отсечения можно применять для уменьшения величины определителя базисной матрицы.

Б. Комбинаторные методы.

Основаны на разумно организованном переборе вариантов. Существенную роль играют оценочные задачи (ОЗ). Задача $\max_{R} F(x)$ называется оценочной для $\max_{S} f(x)$ если а) $S \leq R$, б) для всех $x \in S$: $f(x) \leq F(x)$. Нпр, релаксированная задача является оценочной для задачи ЦЛП, т.к. для нее $S \in R$ и $f(x) \equiv F(x)$.

БI. Методы ветвей и границ (ВГ) ([1], [3]).

В основу классификации положены 2 основные и 4 вспомогательные характеристики методов ВГ.

Основные характеристики.

I. Стратегия ветвления:

а) ветвление узла с наилучшей оценкой;

б) ветвление последнего из построенных узлов;

в) смешанная стратегия.

2. Применяемая оценочная задача (ОЗ):

а) ОЗ отсутствует;

б) задача ЛП с одним (суррогатным) ограничением $\left(\sum_j (\sum_i a_{ij} \lambda_i) x_j \leq \sum_i b_i \lambda_i\right)$;

в) релаксированная задача ЛП (задаваемую ею оценку можно усилить, проведя несколько итераций по методу Гомори, [6]);

г) задача о рюкзаке;

д) несколько задач о рюкзаке;

е) задача групповой минимизации ([2], гл. I9);

ж) использование нескольких ОЗ в зависимости от ранга узла ветвления и близости оценки к рекорду.

В случаях г), е), оценку можно существенно усилить путем включения отброшенных условий в функцию Лагранжа и вычисления обобщенных множителей Лагранжа (ОМЛ), оптимизирующих оценку [7]. В настоящее время методы вычисления ОМЛ слишком трудоемки, чтобы пересчитывать ОМЛ, при переходе от узла к узлу.

Методы с г), д), е) можно объединить в одну группу, характеризуемую вычислением оценки по таблицам динамического программирования (ДП).

Вспомогательные характеристики (в основном, определяют модификацию метода).

3. Способы ветвления:

а) фиксация значений переменной;

б) дихотомия $x_j \leq [x_j^c]$, $x_j \geq [x_j^c]+1$;

в) ветвление по обобщенным характеристикам (нпр, $\sum x_j = k$, $k = 1, 2, \ldots$);

г) ветвление с фиксацией значений нескольких переменных.

4. Выбор переменной для ветвления:

а) ветвление по заранее намеченному пути (здесь особо надо выделить α) лексикографический перебор и β) перебор в порядке, обратном принятому при построении таблиц ДП);

б) ветвление по переменной с максимальной разностью верхней (для $x_j \geq [x_j^c]+1$) и нижней (для $x_j \leq [x_j^c]$) оценок с вычислением штрафов ([I], стр. 26);

в) ветвление по переменной, максимально приближающей к области допустимых решений;

г) ветвление по вероятностным характеристикам;

д) эвристическое ветвление.

5. Метод решения ОЗ:

а) точный;

б) приближенный, для задачи, двойственной к оценочной.

К примеру, метод Лэнд и Дойг имеет следующие характеристики: {БI, IА, 2В, 3а, 4д, 5а}, его модификация (Бил и Смолл), используемая в коммерческих программах: {БI, Iв, 2в, 3б, 4б, 5а}, аддитивный алгоритм Балаша: {БI, Iб, 2а, 3а, 4в}, метод фильтра Балаша: {БI, Iа, 2б, 3г, -5а}. По этой же схеме можно классифицировать методы ВГ для специальных задач. Так, метод Литтла и др. для задачи коммивояжера имеет характеристики {БI, Iа, 2б, 3а, 4б, 5б}.

Сравнительный анализ методов ВГ показывает, как надо совершенствовать отдельные процедуры с тем, чтобы их можно было эффективно использовать в общей схеме. Так, разработка простого метода пересчета ОМЛ при переходе к новому узлу привела бы к построению нового эффективного метода ВГ.

БП. Методы упорядоченного перебора (УП) [8], [9].

Перебираются решения оценочной задачи в порядке убывания (в задаче на максимум) целевой функции. Первое же решение, удовлетворяющее ограничениям исходной задачи, будет оптимальным (при $F(x) \equiv f(x)$).

Классификация по виду оценочной задачи:

I) $\max\{\sum c_j x_j \mid \sum x_j \le k,\ 0 \le x_j \le d_i,\ x_j$ целые$\}$;

2) задача о рюкзаке;

3) несколько задач о рюкзаке;

4) задача групповой минимизации.

Для БП.3 помимо непосредственного алгоритма УП разработан алгоритм УП без повторяемости неполных вариантов [IO]. Обход дерева вариантов в нем аналогичен схеме {БI, Iа, 2д, 3а, 4аα, 5а}, однако за счет построения таблиц УП достигается существенная экономия памяти.

БІІ. Методы полного описания

Реализуется (упорядоченный по целевой функции), перебор всех вершин многогранника допустимых решений релаксированной задачи ЛП. Тем самым, методы применимы для задач с булевыми переменными (БЛП), все решения которой являются вершинами соответствующих многогранников.

БІУ. Методы случайного поиска (примыкают к приближенным).

ІУ. І. Методы, использующие прямую задачу.

ІУ.ІІ. Методы игровые, использующие функцию Лагранжа.

ІУ.3. Методы, сочетающие случайный поиск с локальной оптимизацией.

Среди других методов следует выделить два, применимых к широким классам специальных задач.

БУ. Метод последовательных расчетов (ПР) (для задач типа размещения)

У.І. Непосредственное применение для задач, обладающих свойством Черенина.

У.2. Для задач, не имеющих этого свойства, строится оценочная со свойствами Черенина. По методу ПР перебираются оптимальные и близкие к ним решения оценочной задачи и применяется критерий оптимальности схемы УП (комбинаторно-аппроксимационный метод Хачатурова).

БУІ. Метод динамического программирования (и примыкающий к нему метод последовательного анализа вариантов).

Многие методы упомянуты здесь без ссылок. Их описание, либо ссылку на них можно найти в приводимых ниже монографиях.

Литература.

I. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы прикладные задачи дискретного программирования. М., Наука, 1976.

2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., Мир., 1974.

3. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М., Наука, 1969.

4. Исследования по дискретной оптимизации. М., Наука, 1976.

5. Ботяков А.А. Некоторые вопросы целочисленного программирования. "Экономика и мат.методы", 1968. 4, № 4.

6. Венгерова И.В., Финкельштейн Ю.Ю. Экспериментальное исследование метода отсечения и ветвления. "Экономика и мат. методы", 1974, IO, № 5.

7. Лебедев С.С. Целочисленное программирование и множители Лагранжа, "Экономика и мат.методы", 1974, IO,№3.

8. Емеличев В.А. Дискретная оптимизация. Последовательностные схемы решения. I., П. "Кибернетика", 1971. I,№6, 1972, № 2.

9. Лебедев С.С. Метод упорядоченного перебора целочисленного программирования. Сб. "I-я зимняя школа по мат.применению и смежным вопросам. Дрогобыч, вып. 3", М., ЦЭМИ АН СССР, 1969.

IO. Фридман Ф.А. Программы по методу упорядоченного перебора для решения задачи целочисленного программирования. "Программы и алгоритмы", вып. 60, М., ЦЭМИ АН СССР, 1969.

II. Мартош Б. Нелинейное программирование. Теория и методы. Будапешт, 1975.

ГЛАВА 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИВЯЗКЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ И ПРОГРАММ К ПРОЕКТУ АСП СОУ

I. Уточнение понятий

I.I. Оптимизационные методы - полная совокупность средств, используемых при решении оптимизационных задач управления и проектирования, определяемых на основе общепринятых понятий. Оптимизационные методы включают в частности такие понятия как экономические оптимизационные модели, математические модели оптимизации, численные методы анализа оптимизационных моделей, алгоритмы решения экстремальных задач, программы и пакеты прикладных программ для решения оптимизационных задач.

I.2. Каталог методов - это в дальнейшем фрагмент, включающий множество оптимизационных методов. Элементом каталога методов является некоторый подкласс методов. Примерами элементов смогут служить следующие подклассы:

- модели линейно-целочисленного программирования;
- статические модели размещения производства;
- пакет прикладных программ нелинейной оптимизации.

Элемент каталога - это по существу отдельный информационный объект, содержащий описание подкласса методов (информационная карта, см. Том 3, книга 3).

Для каталога методов понятия элемент каталога, оптимизационный метод, подкласс оптимизационных методов- синонимы.

I.3. Ведение Каталога методов - это процесс информационного отображения деятельности по созданию и развитию оптимизационных методов. Можно выделить два аспекта ведения каталога: отражение деятельности по созданию оптимизационных методов непосредственно в интересах развития каталога, отражение деятельности во "внешней" среде, т.е. независимой от создания средств АСП СОУ. Можно говорить об эволюции каталога методов в условиях действия внутренних и внешних факторов.

I.4. Выбор метода

I.4.I. Запрос - указание функции (задачи) из области функциональной ориентации множества оптимизационных методов, включенных в каталог. Если описание функций и функциональной ориентации методов ведется на одном языке, можно говорить о формализации запроса, и формализации поиска метода. В противном случае запрос и поиск метода - это эвристическая деятельность проектировщика.

I.4.2. Информация для выбора - множество элементов каталога методов, которые содержат запрос в области своей функциональной ориентации. Информация для выбора может быть получена формальными средствами или экспертным способом.

I.4.3. Интерпретация - углубление интерпретированных представлений о функции и множестве методов в информации для выбора. Изучение информационных карт, литературы указанной в ссылках и т.п.

I.4.4. Оценка - формирование оценочных функций, критериев, отражающих качественные и количественные характеристики использования методов для реализации функций. Оценка - деятельность проектировщика. В некоторых случаях оценочные функции и критерии могут быть занесены в информационную карту.

I.4.5. Выбор метода - принятие решения проектировщиком относительно того, какой метод включается в проект

При выборе метода могут использоваться формальные методы принятия решений, т.е. сами оптимизационные методы. Проектировщик при этом формализует задачу выбора метода, и может в соответствии с общими правилами пользоваться средствами Каталога для решения этой задачи.

I.5. Автоматизация ведения каталога - использование ЭВМ для хранения Каталога, т.е. информация о всех методах, включенных в Каталог. Проблема автоматизации - проблема эволюции, т.е. создание средств пополнения каталога. Эти средства тесным образом должны быть связаны со средствами поиска информации для выбора. Автоматизация предполагает формализацию запроса, формализацию поиска.

I.6. Автоматизация выбора - постановка задачи выбора метода средствами ЭВМ. Отметим особо, что автоматизация выбора предполагает формализацию запроса, формализацию поиска информации для выбора и обязательную формализацию процесса постановки задачи выбора. При этом способы решения задачи выбора могут быть любыми,как экспертными так и автоматическими.

I.7. Требования к структуре. Из предыдущего следует:

- понятие оптимизационный метод включает множество неоднородных по своему существу объектов,
- каталог методов, как множество таких объектов, создается и функционирует в процессе эволюции под влиянием внутренних и внешних факторов,
- автоматизация этапов выбора методов требует формализации запроса, поиска информации и процесса постановки задачи выбора.

Отсюда формулируются требования к структуре Каталога методов:

- структура должна учитывать разнородность объектов,
- структура должна формироваться локальными средствами в процессе эволюции,

– структура должна сохранять эффективность операционных средств анализа и синтеза,

– структура должна отражать концептуальную целостность Каталога методов.

2. Сетевое представление систем.

В дальнейшем под системой понимается средство представления целого в виде совокупности элементов и связей между элементами. В значительном числе случаев можно ограничиться фиксацией в системе только попарных связей между элементами, а остальные, групповые связи элементов рассматривать как композиции попарных. В таких случаях системы могут рассматриваться как сети, в которых вершины соответствуют элементам, а дуги – попарным связям между элементами, или отношениям между элементами.

Построение систем всегда связано с определенными целями анализа и синтеза изучаемых объектов. Но независимо от конкретных целей исследования общий метод использования систем состоит в поддержании баланса между двумя противоречивыми тенденциями:

повышением уровня сложности системы в интересах адекватности моделирования, и сохранением простоты операционных средств для работы с системой. Сетевое представление систем позволяет успешно балансировать указанное противоречие. Сети представляют собой объекты, для которых существует эффективный и в достаточной степени стандартизованный аппарат реализации на ЭВМ. В то же время с помощью сетей можно описывать весьма сложные системы. Потенциальная достижимость необходимого уровня сложности реализуется провозглашением числа элементов и числа различных отношений между элементами в системе счетными. Практически это представляет возможность в любой момент присоединить к системе еще один элемент и еще одно отношение.

2.I. Определение системы

Системой называется пара $\{X, S\}$, где
X - счетное множество элементов $x_i \in X$
S - счетное множество отображений $A_j \in S$
множества X в себя.

Множество X называется элементной базой системы (алфавитом, словарем и т.п.), множество S называется коммуникатором (тезаурусом, грамматикой и т.п.).

2.2. Классы систем. Конкретные исследования систем целесообразно связывать с понятием классов систем. Классы образуются при конкретизации общего определения в трех направлениях:

- выбор конечного числа отображений,
- интерпретация отображений,
- выбор композиционного расширения.

2.2.I. Каждое отображение $A_j \in S$ устанавливает совокупность парных отношений, которые можно считать в некотором смысле однородными. Однородная совокупность отношений - это некоторый разрез системы. Фиксируя число отображений, мы выбираем число разрезов.

Таким образом класс систем определяется числом разрезов. При прочих равных число разрезов характеризует уровень сложности системы.

2.2.2. При построении систем каждое отображение $A_j \in S$ интерпретируется в соответствии с конкретными исследовательскими целями. Из множества возможных интерпретаций можно выделить некоторую совокупность типовых, которые отражают множество основных отношений в реальных системах.

К таким типовым отношениям относятся например, отношения "целое-часть", "больше-меньше", "причина-следствие", "цель-средство", "задача-метод" и т.п. Фиксация подмножеств интерпретаций отображений-разрезов образует классы интерпретированных систем.

2.2.3. При рассмотрении систем, кроме основных отображений рассматриваются их композиции. По своему смыслу основные отображения соответствуют существующим, т.е. наблюдаемым связям между элементами. Композиции напротив отражают проектируемые, т.е. изучаемые связи. Рассмотрение композиций при прочих равных усложняет процедуры анализа системы. Таким образом различные правила композиции соответствуют различным формальным классам систем.

Пусть задана система $\{X, S_n\}$, где $S_n = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$, n - размерность системы. Полным композиционным расширением системы называется $\bar{S}_n$ - множество отображений, каждое из которых является многочленом от $A_1, A_2, \ldots A_n$. Система $\{X, \bar{S}_n\}$ называется полной расширенной системой размерности n. Множество отображений S, такое, что

$$S_n \subset S \subset \bar{S}_n$$

называется расширением системы.

Простым расширением называется множество, содержащее исходные отображения и все их попарные композиции, т.е.

$$\{S_n, \{A_i \cdot A_j\}_{n,n}\}$$

2.3. Системы с независимыми разрезами

Для использования сетевого описания систем в интересах АСП СХУ, в частности для Модели Каталога Методов, интересно рассмотреть класс систем с независимыми разрезами (СНР). Этот класс относится к системам, простым в структурном отношении. Использование систем такого класса позволяет наращивать сложность систем в количественном плане (за счет увеличения числа отображений), однако ограничивает возможности структурного усложнения. Наиболее близкая аналогия систем с независимыми разрезами - многомерные матричные модели. Для поэтапного развития машинных реализаций систем, СНР могут лежать в основе первых очередей.

Система $\{X, S\}$ - называется системой с независимыми разрезами, если для любых двух отображений $A_i, A_j \in S$ имеет место условие независимости A_i и A_j: $\forall x \in X: \bar{A}_i x \cap \bar{A}_j x = \varnothing$, где $\bar{A}$ - транзитивное замыкание A.

Необходимым условием независимости является условие $\forall x \in X: x \notin \bar{A}_i x \vee x \notin \bar{A}_j x$

2.4. Системы с расслоением.

Интересным является вопрос о сохранении независимости отображений при композиционном расширении системы. Рассмотрим два произвольных отображения A и B. Будем говорить, что отображение A задает расслоение отображения B, если $\forall x \in X: \bar{A}x \cap \bar{B}\bar{A}\bar{B}x = \varnothing$.

Если совместно выполняется пара условий

$$\forall x \in X: \bar{A}x \cap \bar{B}\bar{A}\bar{B}x = \varnothing$$

$$\forall x \in X: \bar{B}x \cap \bar{A}\bar{B}\bar{A}x = \varnothing,$$

пара отображений $A, B \in S$ образует симметричное расслоение. Простейший пример симметричного расслоения приведен на рисунке 5. Отображения A и B изображаются сплошными и пунктирными стрелками.

Пример симметричного расслоения.

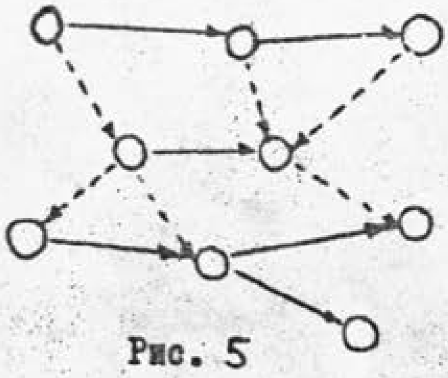


Рис. 5

Ориентированной композицией отображений A и B называется отображение

$$\mathcal{D}(A,B) = \bar{A} \cdot \bar{B} .$$

Симметричной композицией соответственно называется отображение

$$R(A,B) = \mathcal{D}(A,B) \cup \mathcal{D}(B,A)$$

Теорема I.

Если отображения A и B образуют симметричное расслоение, то расширеная система $\{X, \{A, B, R(A,B)\}$ является системой с независимыми разрезами.

Теорема 2.

Если A расслаивает B, то пары отображений (A, B) и ($\mathcal{D}(A,B)$, B) независимы.

Эти простые теоремы, справедливость которых очевидна показывает, что очевидные достаточные условия сохранения независимости отображений при простом композиционном расширении весьма жестки.

Это естественно, так как связи, появляющиеся при вводе в систему независимой композиции, не повторяют ранее имевшихся и идут в "чистое" приращение сложности. Такое приращение требует, чтобы исходное число связей было невелико.

Системы в которых все пары отображений образуют симметричные расслоения образуют класс систем с расслоением. (СР).

Простое расширение переводит системы из класса систем с расслоением в класс систем с независимыми разрезами.

3. Каталог методов

Каталог методов рассматривается как множество , элементы которого представляют собой подкласс оптимизационных методов. Между элементами каталога устанавливаются три вида базовых отношений.

3.I. Интерпретация базовых отношений

3.I.I. K -отношение. Если $x = Ky$, то подкласс методов y принадлежит подклассу методов x .

Пример. y - модели однокритериальной оптимизации.
x - модели многокритериальной оптимизации.

Таким образом K - отношение интерпретируется как классификационное отношение. Компоненты связности, образуемые K - отношениями, являются совокупностями однородных подклассов методов. Связи, изображенные на рис. 4 , являются K -отношениями. Интерпретация $x = Ky$: x - общее, y - частное.

3.I.2. M - отношение. Если $x = My$, то подкласс y может быть реализован средствами подкласса методов x .

Пример. y - задачи линейного программирования
x - пакет ЛП для ЭВМ БЭСМ-6.

M - отношение связывает операнды в цепочки поэтапного решения проблемы реализации функций, т.е. является отношением функциональной ориентации. Множество $\overline{M}x$, где $\overline{M}$ - транзитивное замыкание M, представляет полную совокупность методов, которые в той или иной мере решают проблему x. Интерпретация $x = My$:

y - задача,

M - метод.

3.1.3. $И$ - отношение. Если $x = Иy$, то подкласс y может быть использован в составе средств подкласса x. Это отношение как и предыдущее сопоставляет операнды по функциональным характеристикам. Но в отличие от предыдущего $И$ - отношение отражает не функциональную ориентацию подкласса методов, а его инструментальные свойства.

Пример: y - симплекс-метод,

x - задача линейного целочисленного программирования.

Здесь между x и y нельзя установить M-отношение вида $y = Mx$, так как задача x не может быть решена средствами y. Но $x = Иy$ справедливо, так как симплекс-метод может быть использован при решении задачи целочисленного программирования, например для получения оценок в методах перебора. Инструментальные отношения могут использоваться в проектировании для выбора неполных средств решения задач, в тех случаях, когда полный метод в смысле M-отношений отсутствует.

Интерпретация $x = Иy$:

x - метод,

y - инструмент.

3.2. Эволюция Каталога методов

При вводе нового объекта x в Каталог методов

X, необходимо определить множества образов K_x, M_x, $И_x$, т.е. доопределить базовые отображения для нового объекта. Предполагается, что такое доопределение осуществляется экспертным путем.

Можно управлять эволюцией структуры Каталога методов, накладывая различные ограничения на способы доопределения отображений K, M, $И$. Эти ограничения распространяются на образы нового элемента x вводимого в Каталог и имеют локальный характер.

Правила локального управления эволюцией каталогов:

Ограничение связности: $K_x \cup M_x \cup И_x \neq \emptyset$.

Локальная независимость: $K_x \cap M_x = \emptyset$,

$$K_x \cap И_x = \emptyset, \quad M_x \cap И_x = \emptyset.$$

Ограничение мощности образов

$$|K_x| \leq m_1, \quad |M_x| \leq m_2, \quad |И_x| \leq m_3.$$

Если базовые отображения однозначны мы имеем дело с древовидной эволюцией Каталога. Древовидная, локально-независимая, связная эволюция - наиболее простой способ организации Каталога методов с тремя разрезами. Заметим, что локальные ограничения недостаточны для того чтобы удержать систему в рамках независимой или система с расслоением.

3.4. Поиск информации в Каталоге методов.

Очевидно в рамках каждого из трех базовых отношений можно поставить для произвольного элемента x задачу отыскания ближайших n, следующих или предшествующих других элементов. В зависимости от значения n и заданного отношения мы можем отыскивать частные или общие случаи подкласса методов, методы решения задач или задачи, на которые ориентирован метод, возможности использования одних методов при реализации других.

При использовании ЭВМ структуру Каталога изображает некий трехцветный граф. Этот граф является основой для выполнения поисковых процедур.

Формально поиск информации состоит в выборке некоторого структурного окружения некоторого заданного элемента.

При поиске метода для решения задачи x строится транзитивное замыкание $y = \bar{M}x$, и среди элементов y выбирается подходящий метод. При поиске указанным способом может оказаться, что $y = \bar{M}x$ недостаточно представительно. Расширение множества y можно осуществить при помощи композиционного расширения.

3.5. Композиционное расширение поисковых средств Каталога методов осуществляется на основе факта: Если задача y может быть решена методом x, то частный случай задачи y, может быть решен методом для которого x является частным случаем.

Таким образом мы вводим в рассмотрение отношения $x = M1\,y$, интерпретируемое как y - задача, x - общий метод.

Определение $M1$: $x = M1\,y$, если существуют a и b, такие что

$$x = Ka, \quad b = Ky, \quad a = Mb.$$

3.6. Возможные формализации задач выбора методов

3.6.I. Ранжировка элементов Каталога методов.

Формальная ранжировка каталога методов в основана на следующих утверждениях:

- если $z = My$ и $y = Mx$, то z предпочтительней y,
- если $z = Ky$ и $y = Kx$, то x предпочтительней y.

Первое утверждение отдает предпочтение более законченным методам, например програмна лучше алгоритма. Второе утверждение придает больший вес конкретным методам, Например элемент каталога "метод декомпозиции Данцига-Вулфа" лучше, элемента каталога " численные методы линейного программирования".

Ранжировка производится путем апроксимации Каталога Методов системой с расслоением.

Пусть $\{X, \{K_1, M_1\}\}$ система с расслоением, при этом $K_1 \subset K$, $M_1 \subset M$, а мощности $|K_1|$ $|M_1|$ максимальны.

Тогда множество X может быть разбито на несвязные подмножества двумя способами

$$X = \{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots X_t^{(1)}\}$$

где $X_i^{(1)}$ не связаны друг с другом в смысле K - отношений, и

$$X = \{X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots X_z^{(2)}\}$$

где $X_j^{(2)}$ несвязны в смысле M -отношений.

При этом

$$M_1 X_1^{(1)} = \emptyset,$$

$$M_1 X_2^{(1)} \cap X_1^{(1)} \neq \emptyset,$$

$$\ldots$$

$$M_1 X_t^{(1)} \cap X_{t-1}^{(1)} \neq \emptyset$$

$$K_1 X_z^{(2)} = \emptyset$$

$$K_1 X_{z-1}^{(2)} \cap X_z^{(2)} \neq \emptyset$$

$$\ldots$$

$$K_1 X_1^{(2)} \cap X_2^{(2)} \neq \emptyset$$

Номера подмножеств $X_i^{(1)}$ соответствуют номерам приоритета методов в смысле их законченности, номера подмножеств $X_j^{(2)}$ соответствуют номерам приоритета в смысле конкретности методов. Таким образом каждый элемент x Каталога методов имеет два параметра $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, которые отражают некоторые формальные качественные свойства соответствующих подклассов методов.

3.6.2. Задача выбора.

Пусть x - задача, включенная в Каталог методов. Формальная задача выбора метода заключается в нахождении такого $y \in X$, что $y \in \overline{M}x \cup \overline{M1}x$ и $\{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\} \leq \{\alpha_1(z), \alpha_2(z)\}$, для всех $z \in \overline{M}x, \overline{M1}x$. Сравнение понимается как лексикографическое.

4. Пример каталога оптимизационных методов.

4.I. Список элементов каталога ($x_i \in X$).

Подклассы экономических оптимизационных моделей.

I. Территориальные модели
2. Отраслевые модели
3. Модели размещения
4. Модели планирования в региональном транспортно-сбытовом комплексе (ТСК)
5. Модели перспективного планирования ТСК
6. Модели текущего планирования ТСК
7. Модели оперативного планирования ТСК
8. Размещение складов
9. Размещение стоянок
IO. Размещение центров технического обслуживания

II. Расчет кратчайших расстояний
I2. Распределение подвижного состава по грузонаправлениям.
I3. Закрепление поставщиков за потребителями
I4. Оптимизация грузопотоков
I5. Оптимальные маршруты.

Подклассы математических моделей оптимизации

I6. Транспортная задача ЛП.
I7. Распределительная задача ЛП
I8. Задача ЛП
I9. Сетевая потоковая модель
20. Блочная задача ЛП
2I. Трехиндексная транспортная задача ЛП
22. Задача о назначениях
23. Дерево кратчайших путей
24. Матрица кратчайших расстояний

Подклассы численных методов

25. Численные методы ЛП
26. Симплекс-метод
27. Метод потенциалов
28. Венгерский метод
29. Сетевые методы
30. Метод Форда-Фалкерсона
3I. Метод двухсторонней очереди
32. Метод Дейкстры
33. Метод Данцига-Вулфа
34. Алгоритм Грибова
35. Алгоритм прямых и обратных списков

Подклассы программного обеспечения

36. Комплекс программ решения задач транспортного типа

37. Программы решения транспортных задач
38. Программы расчета кратчайших путей
39. Пакет анализа оптимизационных экономических моделей (ЦЭМИ)
40. Комплекс программ ЛП
41. Комплекс программ нелинейной оптимизации
42. Пакет ПМП (ЕС ЭВМ)
43. Пакеты прикладных программ оптимизации
44. Пакет "ОПТИМА-2"
45. Пакет "ДИСО"
46. Пакет "ПИОНЕР"
47. Программное обеспечение БЭСМ-6
48. Программное обеспечение ЕС ЭВМ.

4.2. Структура Каталога

Структура каталога приведена на Рис. 6

Простые стрелки соответствуют K -отображению, жирные стрелки показывают M -отображение, пунктирные стрелки показывают $И$ -отображение. Чтобы сохранить наглядность, на рисунке 6 показаны не все связи, а лишь основные.

4.3. Информация для выбора. Пусть рассматривается функция перспективного планирования в части развития материальной базы автотранспортных подразделений. Рассматривается подкласс 9: модель размещения стоянок. Находим транзитивное замыкание $\overline{M}x_9$. Получаем $9 \rightarrow 21$ т.е. описание трехиндексной транспортной задачи. Расширяем поиск посредством композиции $\overline{MK}x_9$. Получаем

$$9 \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 33$$

т.е. ссылку на декомпозиционный метод Данцига-Вулфа. Расширяем поиск посредством композиции $(\overline{MK})$.

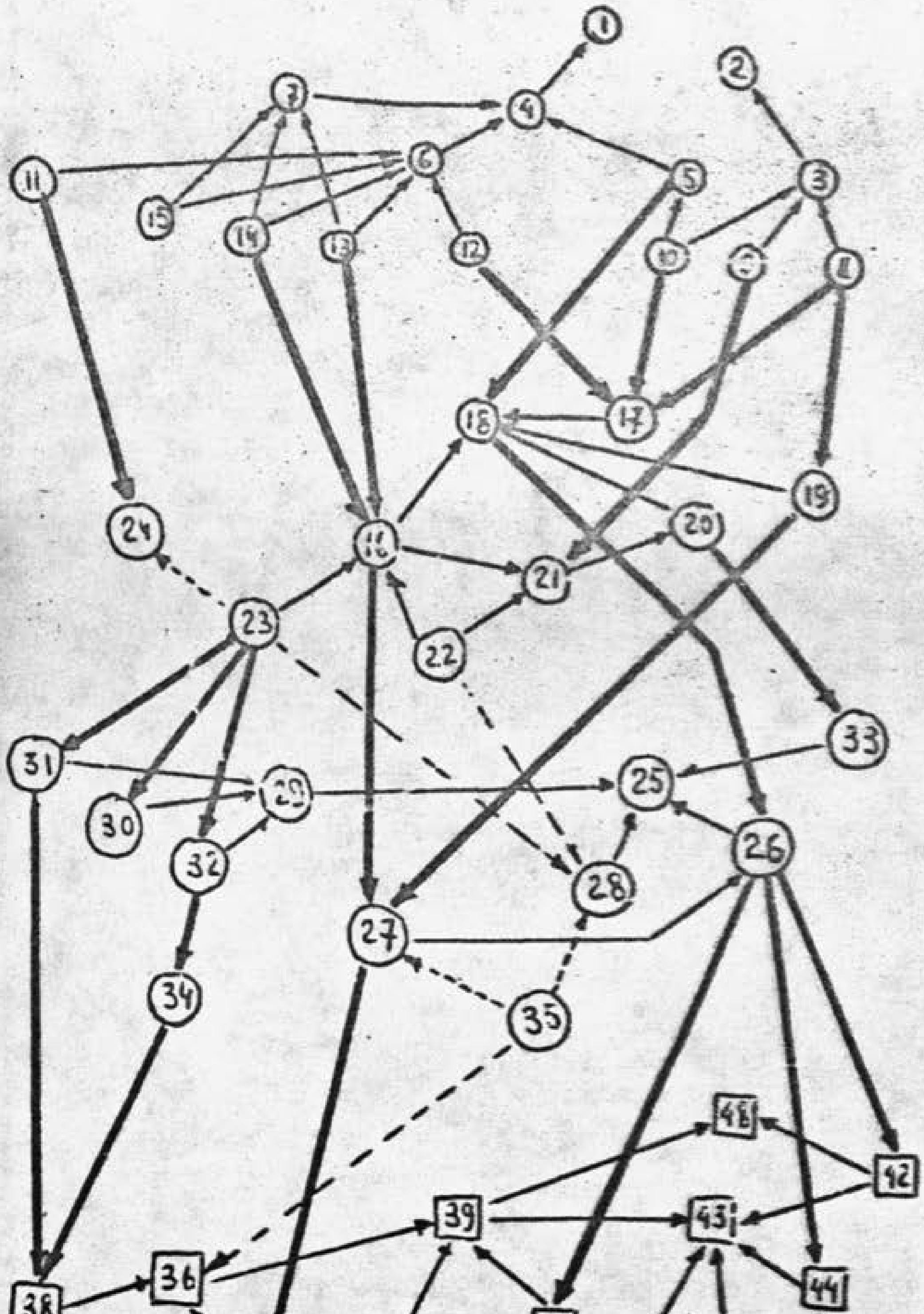
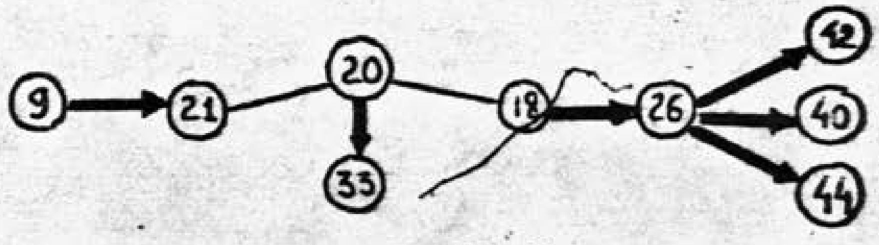


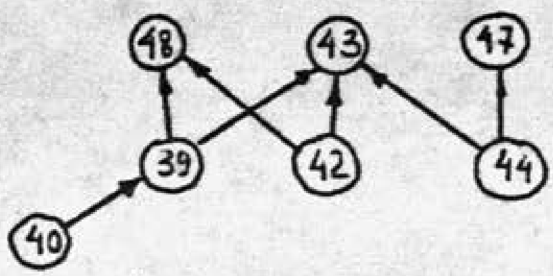
Рис. 6. Структура Каталога.

Получаем



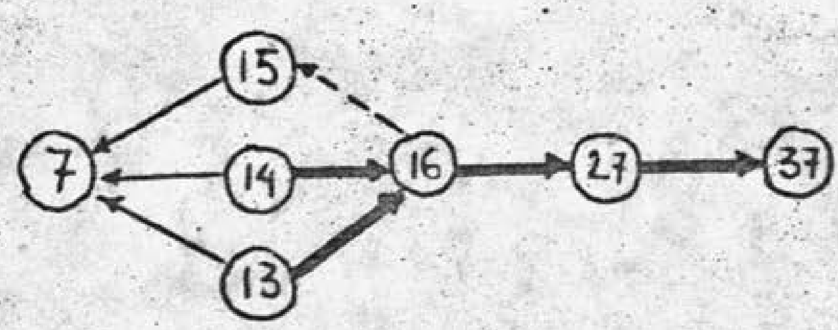
4.4. Выбор. Подклассы 40, 42, 44, имеют очевидно больший вес, поэтому именно они предлагаются в первую очередь проектировщику для выбора. Тем не менее, если размеры задач очень велики, ни одно из программных средств может не удовлетворить проектные требования. Тогда остается предыдущий вариант, т.е. разработка специальной программы с использованием метода Данцига-Вулфа.

При сопоставлении подклассов 42, 40, 44 проектировщик может вызвать их k-замыкание, т.е. получить информацию вида:



Далее он может привлечь соображения по выбору вычислительной техники. Если в СОУ используется БЭСМ-6, то в проект попадает подкласс 44.

4.5. Интересным является вопрос: выбрать программные средства для обеспечения задач оперативного планирования в транспортно-сбытовом комплексе. Мы получаем следующую картину:



Такое решение вопроса отражает историю развития средств оптимизации: оптимизационные модели оперативного планирования сбыта и транспортировки создавались на основе подкласса Iб, т.е. на основе транспортной задачи линейного программирования.

Заключение

Анализ применения оптимизационных методов в решении задач управления показывает, что для использования в проектах СОУ пакетов прикладных программ и других средств программного обеспечения решения оптимизационных задач недостаточно иметь только документацию по программному обеспечению. Использование программ - это конечные этапы решения оптимизационных задач. Целесообразно рассматривать программное обеспечение как одно из средств применения оптимизационных методов. Оптимизационные методы - широкий арсенал средств, включающий модель, численные методы, алгоритмы, программы. Они развиваются независимо от АСП СОУ как самостоятельные области исследований, в которых складываются определенные представления о структуре разрабатываемых методов и средств. Проблема привязки оптимизационных методов к аппарату АСП СОУ - это прежде всего проблема интеграции разработок и разработки принципов их общей систематизации в рамках Каталога методов. Предложенный принцип сетевого описания структуры Каталога методов позволяет установить классификационные отношения между объектами Каталога из одинаковых областей исследований, и инструментальные отношения между объектами из смежных областей.

Принцип сетевого описания конструктивен, так как он позволяет развивать Каталог, сохраняя его целостность, осуществлять процедуры поиска и анализа информации о методе в плане функциональной ориентации и инструментальных свойств. Сетевое описание имеет машинную ориентацию, и поэтому программы для работы с Каталогом методов могут быть эффективными.

Дальнейшие работы по созданию Каталога оптимизационных методов должны развиваться в трех направлениях:

- дальнейшая, более подробная систематизация оптимизационных методов по разделам с акцентом на выявление инструментальных отношений и функциональной ориентации;
- разработка формальных средств анализа систем, заданных посредством сетевого описания, т.е. многоцветными графами;

– разработка программного обеспечения Каталога методов, т.е. программ, обеспечивающих ввод и хранение Каталога методов в ЭВМ, позволяющих осуществлять поиск необходимой информации.

После создания или выбора подходящих программных средств, можно приступать к наполнению Каталога реальной информацией.