Государственный комитет Совета Министров СССР
по делам строительства

Центральный научно-исследовательский и проектно-экспериментальный институт автоматизированных систем в строительстве
(ЦНИПИАСС)

УДК 69.003:658.5.014.011.56
№ Гос.регистрации 77023963
Инвентарный №

"Утверждаю"
Директор ЦНИПИАСС
д.т.н., процессор
А.А.Гусаков
"27" марта 1978 г.

Технический проект
АСП СОУ

Том 2. Програмное обеспечение АСП СОУ

Книга 10. Требования к специальным программным средствам.

Шифр 38-9

Зав. сектором
научный руководитель темы С.П.Никаноров

Ответственный исполнитель
с.н.с., к.ф.-м.н. Д.Е.Персиц

Москва - 1978 г.

38-9
т.2, кн.10

Список исполнителей

С.П.Никаноров - зав.сектором, рук.темы;
Д.Б.Персиц - с.н.с., к.ф.-м.н.;
А.В.Тищенко - с.н.с., к.ф.-м.н.;
Е.В.Савелов - м.н.с.

Р Е Ф Е Р А Т

Книга содержит 67 стр., таблиц.

Ключевые слова: род структуры, ступень на множествах, фактор-структура, функциональная структура, согласование диапазонов, композиция отношений.

Книга содержит описание специальных средств автоматизированной системы проектирования систем организационного управления, т.е. средств, не принадлежащих основным трем блокам: логико-интерпретационному, выбора методов и документирования. Специальные средства включают построение индуцированной фактор-структуры на ступени над n множествами и ее применение к типовому проектированию и аппроксимации выбора методов для выполнения функций; построение функциональной структуры по графу термов рода структуры; выполнение теоретико-множественных операций; построение свертки функциональной структуры; алгоритм согласования диапазонов выходов одних функций с входами других.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Введение 6

I. Индуцированная фактор-структура на ступени и ее применения 9

I.I. Определение индуцированной фактор-структуры на ступени и алгоритм ее построения II

I.2. Применение алгоритма построения фактор-структуры на ступени I5

I.2.I. Типовое проектирование I5

I.2.2. Аппроксимация выбора методов в общем случае I6

I.2.3. Аппроксимация выбора методов на базе рода структуры I6

2. Построение функциональной структуры, индуцируемой родом структуры I8

3. Требования к блоку индуцированной интерпретации (БИИ) 23

3.I. Назначение БИИ 23

3.2. Определения основных понятий 23

3.3. Требования к программному комплексу БИИ . . . 25

4. Подстановка кортежей 28

4.I. Содержание задачи и ее применения 28

4.2. Соглашения и обозначения 28

4.3. Требования к программам 33

4.3.I. Формулировка задачи 33

4.3.2. Входные и выходные формы 34

4.3.3. Оценка параметров задачи 37

4.4. Постановка задачи в терминах теории графов . . 38

4.5. Формулировка задачи 39

4.6. Алгоритм формирования формы 2 при малом объеме исходной информации 4I

38-9
т-2,рц 10

5. Теоретико-множественные операции 45

5.I. Назначение математических алгоритмов теоретико-множественных операций и форма их представлений 45

5.2. Состав математических алгоритмов 45

5.3. Теоретико-множественные операции 46

6. Согласование диапазонов "выходов-входов" 6I

7. Композиция функций для бесконечных областей значений переменных 64

7.I. Вводные замечания 64

7.2. Замкнутость класса линейных функций 65

7.3. Замкнутость класса $C^{\infty}(R^n)$ 65

7.4. Замкнутость класса непрерывных функций 66

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей книге излагаются требования к различным программным средствам АСП СОУ с различной степенью конкретности: от постановки задачи до алгоритмов и машинных форм. В нее вошли те задачи, которые по тем или иным причинам не вошли в книги I-9 тома 2. Книга состоит из 7 разделов, совершенно независимых друг от друга.

В разделе I приводится алгоритм, позволяющий по фактор-структурам на множествах строить фактор-структуры на ступенях над этими множествами. Заметим, что само существование естественной (в каком бы то ни было смысле) операции перехода от фактор-структур на множествах к фактор-структурам на ступенях не кажется совершенно очевидным. Роль этого алгоритма состоит в возможности получать фактор-структуры на классе R -интерпретаций рода структуры с помощью их задания только на базисных множествах, некоторые другие применения приведены в том же разделе I. Как это не покажется неправдоподобным, но логика типового проектирования оказывается почти тождественной логике аппроксимации выбора методов для выполнения функций, если смотреть на это глазами указанного выше алгоритма.

В разделе 2 строится алгоритм, позволяющий преобразовывать граф термов рода структуры в функциональную структуру со сверткой, описываемой этим родом структуры. Полученное решение задачи в виде алгоритма очень естественно и интересно. Например, априорно можно было бы думать, что в роде структуре, богатом аксиомами, можно в результате получить функциональную структуру, состоящую из единственной функции. На самом деле, функций в полученной функциональной структуре не меньше, чем число уровней в графе термов независимо от количества и характера аксиом.

В разделе 3 дается способ построения R-интерпретации главного рода структуры по R -интерпретациям базовых родов структур и дополнений. Основное значение этого блока индуцированной интерпретации состоит в согласованном построении абстрактной модели, ее семантики и значений ее перемен-

38-2
Т.2,кн10

ных. Кроме того, для такого построения, посуществу, не требуется дополнительных программных средств, кроме тех, которые содержатся в логико-интерпретационном блоке.

Разделы 4 и 5 заимствованы из отчета [4] (см. том I, книга I, раздел 5). В разделе 4 строится некоторая формальная конструкция дифиниций, т.е. определений одних понятий через другие. Раздел 5 содержит постановки задач теоретико-множественных операций, а также входные и выходные формы. Роль соответствующих программ состоит в выполнении некоторых распространенных задач для построения R-интерпретации (главного) рода структуры.

Раздел 6 посвящен очень важному и, как показано проведенное исследование, трудному даже с теоретической точки зрения вопросу о согласовании диапазонов выходов и входов, реализующих связь процессов в системе. В общем виде задача представляется практически неразрешимой. Поэтому пришлось ограничиться функциональными структурами с графами без циклов и петель, функции которых имеют не более, чем по одному выходу и входу. Но даже в такой постановке приведенный алгоритм не является тривиальным и можно надеяться с его помощью решать многие практические задачи на этапе построения функциональных структур.

Наконец, раздел 7 также посвящен неразрешимой в общем виде задаче: построение свертки заданной функциональной структуры. Это есть вопрос об изучении возможностей системы. В разделе 6 эта задача решается для случая двух функций, имеющих по одному входу и одному выходу, и то только для линейно задаваемых представляющих отношений. Для других случаев доказаны только абстрактные теоремы существования. Для случая конечных множеств задача полностью решена в техническом проекте блока выбора методов (том 2, книга 7), но практически программа сможет, видимо, работать при количестве функций до десяти. Выделение классов функциональных структур с индивидуальными для этих классов методами решения на данном этапе представляется единственно перспективным.

Таким образом, настоящая книга имеет не только значение как элемент технического проекта, но и как результат теоретических исследований, открывающий широкое поле деятельности.

1. Индуцированная фактор-структура на ступени и её применения

В настоящем разделе решается следующая задача. Пусть на множествах $X_1, \dots, X_n$ заданы фактор-структуры, соответственно, $T_1, \dots, T_n$ (определение фактор-структуры см., например, [I5-2], стр.2I, I70). Требуется дать "естественное" определение и алгоритм построения индуцированной фактор-структуры на ступени $S(X_1, \dots, X_n)$ над множествами $X_1, \dots, X_n$. Основная идея состоит в следующем. Если R - отношение эквивалентности на X_1, то оно естественно продолжается до отношения эквивалентности $\widehat{R}$ на $X = X_1 \times X_2$, где X_2 - произвольное непустое множество, если положить

$$\widehat{R} = \{<x, y> \in X \times X \mid <pr_{X_1} x, pr_{X_1} y> \in R\}$$

При этом если $R_1 \subset R_2$ - отношения эквивалентности на X_1, то $\widehat{R}_1 \subset \widehat{R}_2$. Поэтому фактор-структура T_i, заданная на X_i, индуцирует фактор-структуру $\widehat{T}_i$ на $X_1 \times \dots \times X_n$. Положим $\widehat{T} = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{T}_i$. Это и есть искомая фактор-структура на прямом произведении множеств.

Теперь пусть R - отношение эквивалентности на X. Чтобы определить индуцированное отношение эквивалентности $\widehat{R}$ на булеане $Y = B(X) (= 2^X)$ множества X, заметим, что R определяет сюръекцию:

$$\pi : X \to Z = X/R$$

Но сюръекция π (как, впрочем, всякое отображение) естественно индуцирует отображение булеанов

$$\begin{aligned} \pi^* : \; & Y \to B(Z) \\ & x' \mapsto \pi(x') = \mathrm{Im}(\pi|_{x'}) \end{aligned}$$

Очевидно, π^* - сюръекция вслед за π и потому определяет отношение эквивалентности $\widehat{R}$ на Y. При этом если $R_1 \subset R_2$ - отношения эквивалентности на X, то $\widehat{R}_1 \subset \widehat{R}_2$.

38-9
т-2, ин-10

Поэтому фактор-структура $\mathcal{T}$ на X индуцирует фактор-структуру $\tilde{\mathcal{T}}$ на У. Теперь уже очевидным образом определяется понятие индуцированной фактор-структуры на ступени.

Далее, если $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n$ - мультиуровни фактор-структур $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$, заданных, соответственно, на $X_1, \dots, X_n$, то естественно определяется понятие индуцированного мультиуровня индуцированной фактор-структуры на ступени $S(X_1, \dots, X_n)$. В п.I решается, в действительности, несколько более общая задача: предполагается, что на каждом множестве X_i задано столько фактор-структур с мультиуровнями, сколько раз X_i входит в выражение для ступени и дается алгоритм построения индуцированной фактор-структуры с индуцированным мультиуровнем на ступени. Первоначальная постановка задачи есть ее частный случай, когда все фактор-структуры с мультиуровнями, заданные на одном и том же множестве, совпадают друг с другом.

В п.I дается математический алгоритм построения индуцированной фактор-структуры с мультиуровнем. В п.2 этот алгоритм применяется для построения дополнительного программного обеспечения двух процедур (режимов): типового проектирования и выбора аппроксимирующих методов.

1.1. Определение индуцированной фактор-структуры на ступени и алгоритм ее построения.

Пусть задана реляционная система $\langle S, E \rangle$, где $E \subset S \times S$ отношение эквивалентности на множестве S. Через В (S) будем обозначать множество всех подмножеств множества S. Определим реляционную систему $B(\langle S, E\rangle) = \langle B(S), \bar{\beta}(E)\rangle$, где $\bar{\beta}(E) \subset B(S) \times B(S)$ следующим образом:

$$\bar{\beta}(E) = \{\langle X, X'\rangle \in B(S) \times B(S) \mid (\forall x \in X\ (\exists x' \in X' : (\langle x, x'\rangle \in E))) \wedge (\forall y' \in X' (\exists y \in X (\langle y', y\rangle \in E)))\}$$

Легко проверяется, что $\bar{\beta}(E)$ отношение эквивалентности на множестве $B(S)$, кроме того, если E и E' - два отношения эквивалентности на S и $E \supset E'$, то $\bar{\beta}(E) \supset \bar{\beta}(E')$.

Пусть $\langle S, T, \mathcal{J}\rangle$ - фактор-структура с мультиуровнем. Определим множества $\bar{f}(T)$ и $\hat{f}(\mathcal{J})$ следующим образом:

$$\bar{f}(T) = \{\{\bar{\beta}(R) \in B(B(S) \times B(S)) \mid R \in t\} \mid t \in T\};$$

$$\hat{f}(\mathcal{J}) = \{\langle \{\bar{\beta}(R) \in B(B(S) \times B(S)) \mid R \in t\}\ \bar{\beta}(R_t)\rangle \mid \bar{\beta}(R_t) \in B(B(S) \times B(S)) \wedge t \in T \wedge \langle t, R_t\rangle \in \mathcal{J}\}$$

Если $t = (R_0 = S \times S \supset R_1 \supset \ldots \supset R_m) \in T$, то, очевидно, $\bar{\beta}(R_0) = B(S) \times B(S) \supset \bar{\beta}(R_1) \supset \ldots \supset \bar{\beta}(R_m)$. Кроме того, $R_t \in t \Rightarrow \bar{\beta}(R_t) \in \{\bar{\beta}(R) \mid R \in t\}$. Следовательно, $\langle B(S), \bar{f}(T), \hat{f}(\mathcal{J})\rangle = f(\langle S, T, \mathcal{J}\rangle)$ - фактор-структура с мультиуровнем на множестве $B(S)$.

Пусть $\langle\langle S_1, T_1, \mathcal{J}_1\rangle, \ldots, \langle S_n, T_n, \mathcal{J}_n\rangle\rangle$ - кортеж фактор-структур с мультиуровнем. Определим множества $\bar{F}(T_1, \ldots, T_n)$ и $\hat{F}(\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_n)$ следующим образом:

$$\bar{p}(T_1,\dots,T_n)=\bigcup_{i=1}^{n}\{\{\{\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle,\langle x_1',\dots,x_n'\rangle\rangle\in$$

$$\in\prod_{j=1}^{n}S_j\times\prod_{j=1}^{n}S_j\mid\langle x_i,x_i'\rangle\in R\}\mid R\in t\}\mid t\in T_i\}$$

$$\hat{p}(\mathcal{J}_1,\dots,\mathcal{J}_n)=\bigcup_{i=1}^{n}\{\langle\{\{\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle,\langle x_1',\dots,x_n'\rangle\rangle\in$$

$$\in\prod_{j=1}^{n}S_j\times\prod_{j=1}^{n}S_j\mid\langle x_i,x_i'\rangle\in R\}\mid R\in t\},$$

$$\{\langle\langle y_1,\dots,y_n\rangle,\langle y_1',\dots,y_n'\rangle\rangle\in\prod_{j=1}^{n}S_j\times\prod_{j=1}^{n}S_j\mid$$

$$\langle y_i,y_i'\rangle\in R_t\}\rangle\mid t\in T_i\wedge\langle t,R_t\rangle\in\mathcal{J}_i\}$$

Очевидно,

$$\langle\prod_{j=1}^{n}S_j,\ \bar{p}\langle T_1,\dots,T_n\rangle,\hat{p}\langle\mathcal{J}_1,\dots,\mathcal{J}_n\rangle\rangle=$$

$$=p(\langle\langle S_1,T_1,\mathcal{J}_1\rangle,\dots,\langle S_n,T_n,\mathcal{J}_n\rangle\rangle)$$

фактор-структура с мультиуровнем на множестве $\prod_{j=1}^{n}S_j$.

F -графом $F(\Gamma,X,\pi,\mu)$ называется совокупность следующих данных:

I. Дерево $\Gamma=\langle V,\mathfrak{D}\rangle$, где V множество вершин, Γ - множество дуг.

2. Множество $X=\{\langle X_1,T_1,\mathcal{J}_1\rangle,\dots,\langle X_n,T_n,\mathcal{J}_n\rangle\}$ фактор-структур с мультиуровнями.

3. Отображение $\pi: V\setminus\{v_0\}\Rightarrow Z^+$, где v_0 - начальная вершина (корень дерева). При этом отображение π удовлетворяет условию:

для любой вершины $v\in V\setminus V_e$ отображение $\pi|_{\mathfrak{D}(v)}:\mathfrak{D}(v)\to Z^+$ есть биекция на множество $\{1,\dots,\operatorname{card}\mathfrak{D}(v)\}$

Здесь V_e - множество конечных вершин,

$\mathfrak{D}(v)=\{v'\in V\mid\langle v,v'\rangle\in\mathfrak{D}\}$

4. Отображение $\mu: V_e\to X$.

38-8
Т.2,экз.10

Для любого $i \geqslant 0$ положим $\mathcal{Y}_i = \{ v \in V \mid$ длина (единственного) пути из начальной вершины v_0 в вершину v равна $i \}$. Пусть r - длина максимального пути. Сопоставим каждой вершине $v \in V$ фактор-структуру с мультиуровнем по следующему правилу: для любой $v \in V_e : \langle S_v, T_v, \mathcal{J}_v \rangle = \mu(v)$. Следовательно, для всех вершин из $\mathcal{Y}_{r_k}$ фактор-структуры определены. Если для всех $v \in \bigcup_{i=0} \mathcal{Y}_{r-i}$ фактор-структуры определены, $k \geqslant 0$, то для любой $v' \in \mathcal{Y}_{r-k+1}$ положим, учитывая, что $\mathcal{D}(v') \subset \mathcal{Y}_{r-k}$:

$$\langle S_{v'}, T_{v'}, \mathcal{J}_{v'} \rangle = \mu(\langle\langle S_{(\pi^{-1}|_{\mathcal{D}(v')})(1)}, T_{(\pi^{-1}|_{\mathcal{D}(v')})(1)}, \mathcal{J}_{(\pi^{-1}|_{\mathcal{D}(v')})(1)} \rangle, \ldots, \langle S_{(\pi^{-1}|_{\mathcal{D}(v')})(\mathrm{card}\,\mathcal{D}(v'))}, T_{(\pi^{-1}|_{\mathcal{D}(v')})(\mathrm{card}\,\mathcal{D}(v'))}, \mathcal{J}_{(\pi^{-1}|_{\mathcal{D}(v')})(\mathrm{card}\,\mathcal{D}(v'))} \rangle\rangle),$$

если $\mathrm{card}\, \mathcal{D}(v') > 1$;

$$\langle S_{v'}, T_{v'}, \mathcal{J}_{v'} \rangle = f(\langle S_v, T_v, \mathcal{J}_v \rangle),$$

если $\mathcal{D}(v') = \{v\}$.

Заметим, что если $\mathcal{D}(v') = \emptyset$, т.е. $v' \in V_e$, то $\langle S_{v'}, T_{v'}, \mathcal{J}_{v'} \rangle$ уже определено.

Остается определить, как каждой ступени $S(X_1, \ldots, X_n)$ над $X_1, \ldots, X_n$ сопоставляется дерево $\langle V, \mathcal{D} \rangle$, каждой вершине v которого сопоставлена ступень $S_v(X_1, \ldots, X_n)$ и для каждой неконечной вершины которого задан линейный порядок на $\mathcal{D}(v)$.

Ступени $S(X_1, \ldots, X_n)$ сопоставляется вершина v_0 -корень дерева. Таким образом, множество $\mathcal{Y}_0 = \{v_0\}$ - определено. Пусть определены множества $\mathcal{Y}_0, \ldots, \mathcal{Y}_k$, подграф (дерево), порожденный ими, каждой вершине $v \in \bigcup_{i=0} \mathcal{Y}_i$ сопоставлена ступень S_v над $X_1, \ldots, X_n$ и если v - не конечная вершина подграфа, то задан линейный порядок

38-1
Т-2, лл-10

на $\mathcal{D}(v)$. Тогда для любого $v \in \mathcal{Y}_k$ положим:

а) $\mathcal{D}(v) = \varnothing$ (т.е. будем считать $v \in V_e$), если $S_v = X_i$;

б) $\mathcal{D}(v) = \{v_1\}$, если $S_v = B(S'(x_1, \dots, x_n)$ и $S_{v_1} = S'(x_1, \dots, x_n)$;

в) $\mathcal{D}(v) = \{v_1, \dots, v_p\}$, если $S_v = S_1(x_1, \dots, x_n) \times \dots \times S_p(x_1, \dots, x_n)$, и, далее, $S_{v_j} = S_j(x_1, \dots, x_n)$ $(j = 1, \dots, p)$, $v_1 < \dots < v_p$ – линейный порядок.

Очевидно, этим определены множество $\mathcal{Y}_{k+1}$, порожденный множествами $\mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_{k+1}$ подграф, сопоставление вершинам из $\mathcal{Y}_{k+1}$ ступеней над $X_1, \dots, X_n$ и для каждой неконечной вершины v определенного подграфа – линейный порядок на $\mathcal{D}(v)$. Процесс продолжается до тех пор, пока не получим $\mathcal{Y}_r \subset V_e$, $\mathcal{Y}_{r-1} \not\subset V_e$. Тогда граф с множеством вершин $V = \bigcup_{i=0}^{r} \mathcal{Y}_i$ и с дугами $\langle v, v' \rangle$, где $v' \in \mathcal{D}(v)$, является искомым.

1.2. Применение алгоритма построения фактор-структуры на ступени

1.2.1. Типовое проектирование

Проект (конкретный) здесь понимается как R -интерпретация фиксированного рода структуры Φ. Типовой проект может рассматриваться как класс эквивалентности относительно некоторого отношения эквивалентности на множестве проектов фиксированного объекта. Таким образом, задача типового проектирования сводится в значительной степени к построению фактор-структуры на множестве R -интерпретаций рода структуры Φ и последующему выбору класса эквивалентности, представляющего типовой проект.

R -интерпретация есть кортеж значений основных конституэнт $\langle X_1, \dots, X_n, C_1, \dots, C_m, \mathfrak{D}, \Pi_1, \dots, \Pi_{N_n} \rangle$. Поэтому фактор-структура на множестве R -интерпретаций определяется фактор-структурами на областях значений основных конституэнт. Для этого, в свою очередь, достаточно задать фактор-структуру на областях значений базисных множеств. Действительно, можно считать, что значения множеств X_p выбираются из областей X_p^*, т.е. $X_p \subseteq X_p^*$ ($p = 1, \dots, n$). При этом для конституэнт M и K_i ($i = 1, \dots, N_p$) индуцируются включение $M \subseteq M^*$ и $K_i \subseteq K_i^*$; где ступени M^* и K_i^* получаются из ступеней M и K_i заменами символов X_p на X_p^*. Согласно определению индуцированной фактор-структуры на M^* и K_i^* можно ввести фактор-структуры, индуцируемые фактор-структурами на $X_1^*, \dots, X_n^*$. Тем самым, будет определена фактор-структура на множестве $B(X_1^*) \times \dots \times B(X_n^*) \times M^* \times K_1^* \times \dots \times K_{N_n}^*$.
Типовой проект является кортежем классов эквивалентности

$$\langle \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n, \tilde{\mathfrak{D}}, \tilde{\Pi}_1, \dots, \tilde{\Pi}_{N_n} \rangle$$

выбранных в соответствующих фактор-структурах при фиксированных $C_1, \dots, C_m$ с тем ограничением, что можно выбрать таким образом представителей $X_1 \in \tilde{X}_1, \dots, X_n \in \tilde{X}_n$,

38-9
т.2, экз10

$\mathfrak{D}\in\tilde{\mathfrak{D}}, \Pi_1\in\tilde{\Pi}_1, \ldots, \Pi_{N_n}\in\tilde{\Pi}_{N_n}$ что кортеж

$$\langle X_1, \ldots, X_n, C_1, \ldots, C_m, \mathfrak{D}, \Pi_1, \ldots, \Pi_{N_n} \rangle$$

является R -интерпретацией рода структуры Φ.

1.2.2. Аппроксимация выбора методов в общем случае

В [т.2,кн.5] была рассмотрена схема выбора метода, выполняющего заданную функцию. Здесь излагается обобщение этой схемы.

Пусть задано множество функций (Φ-отношений) Ψ, на котором определена фактор-структура и задан мультиуровень $\mathfrak{I}$. Метод b называется аппроксимирующим функцию $\varphi\in\Psi$ на мультиуровне $\mathfrak{I}$, если существует функция $\varphi'\in\Psi$ такая, что b выполняет φ' и $(\varphi, \varphi')\in R_{\mathfrak{I}}$.

Пусть $\Psi = \{\varphi = \langle X^\varphi, Y^\varphi, R^\varphi, n, m \rangle\}$, где $X^\varphi = \prod_{i=1}^{n} X_i^\varphi$, $Y^\varphi = \prod_{j=1}^{m} Y_j^\varphi$, и заданы множества X_i^* и Y_j^* $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ такие, что для любого $\varphi\in\Psi$ имеют место включения $X_i^\varphi \subseteq X_i^*$ и $Y_j^\varphi \subseteq Y_j^*$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$. Следовательно, $R^\varphi \in B(X^* \times Y^*)$, где $X^* = \prod_{i=1}^{n} X_i^*$, $Y^* = \prod_{j=1}^{m} Y_j^*$. Для выбора метода, аппроксимирующего функцию $\varphi\in\Psi$, требуется ввести фактор-структуру на множестве $B(X^* \times Y^*)$. Эта фактор-структура может быть введена как фактор-структура на ступени, индуцируемая фактор-структурами, заданными на множествах X_i^* и Y_j^*.

1.2.3. Аппроксимация выбора методов на базе рода структуры

Пусть имеется род структуры, размеченный как Φ-отношение с параметрами (т.е. среди основных конституэнт выделены входные и выходные переменные и параметры).

На множестве R-интерпретаций этого рода структуры задается семейство Φ-отношений Ψ посредством варьирования значений параметров $\Pi_{j_1}, \ldots, \Pi_{j_r}$ и областей

38-9
т.2,кн.10

значений переменных $X_1, \dots, X_n, \mathfrak{D}, \Pi_{i_1}, \dots, \Pi_{i_\ell}$. Для выделения классов эквивалентности на семействе Ψ вводятся фактор-структуры на множествах $K_{j_1}^*, \dots, K_{j_n}^*$ в $B(X_1^*), \dots, B(X_n^*), B(M^*), B(K_{i_1}^*), \dots, B(K_{i_\ell}^*)$ где M^* и K_s^* – ступени, полученные из ступеней M и K_s данного рода структуры заменами символов X_i на X_i^*. Таким образом, каждое Φ -отношение из семейства Ψ есть кортеж

$$< \hat{X}_1, \dots, \tilde{X}_n, \hat{\mathfrak{D}}, \tilde{\Pi}_{i_1}, \dots, \hat{\Pi}_{i_\ell}, \Pi_{j_1}, \dots, \Pi_{j_n} >$$

где $\hat{X}_1 \subset B(X_1^*), \dots, \hat{X}_n \subset B(X_n^*), \mathfrak{D} \subset M^*$

$\tilde{\Pi}_{i_1} \subset K_{i_1}^*, \dots, \tilde{\Pi}_{i_\ell} \subset K_{i_\ell}^*, \Pi_{j_1} \in K_{j_1}^*, \dots, \Pi_{j_n} \in K_{j_n}^*$

и существуют значения переменных

$X_1 \in \tilde{X}_1, \dots, X_n \in \tilde{X}_n, \mathfrak{D} \in \hat{\mathfrak{D}}, \Pi_{i_1} \in \hat{\Pi}_{i_1}, \dots, \Pi_{i_\ell} \in \tilde{\Pi}_{i_\ell}$

такие, что кортеж

$$< X_1, \dots, X_n, C_1, \dots, C_m, \mathfrak{D}, \Pi_1, \dots, \Pi_{\nu_n} >$$

является R -интерпретацией рассматриваемого рода структуры.

Далее, ставится задача выбора метода, аппроксимирующего некоторую заданную функцию φ из вышеопределенного семейства Ψ на некотором мультиуровне $\mathfrak{I}$. Фактор-структура на семействе Ψ и мультиуровень на этой фактор-структуре могут быть введены как индуцируемые фактор-структурами и мультиуровнями, заданными на $X_1^*, \dots, X_n^*$, аналогично их введению в типовом проектировании с помощью стандартной конструкции переноса фактор-структуры и мультиуровня с базисных множеств на ступень.

2. Построение функциональной структуры, индуцируемой родом структуры (дополнение к техническому заданию на блок выбора методов)

Пусть главный род структуры размечен как Ф-отношение, т.е. выделены две группы термов, области значений которых задают множества входов и выходов этого отношения. Предполагается, что не существует путей в графе термов, ведущих от выходов ко входам. Собственно Ф-отношение определяется совокупностью всех аксиом главного рода структуры. В качестве множеств входов выбираются области значений тех термов, которые отмечены как входы, а в качестве множеств выходов - области значений тех термов, которые требуется вычислить. Ставится задача: построить функциональную структуру, соответствующую процессу R -интерпретации главного рода структуры,(или точнее графу термов), свертка которой была бы сильнее Ф-отношения, заданного разметкой рода структуры.

Уточним задачу. Дан ГРС с заданным R Int и S Int, причем все конституэнты из S Int не имеют разрешающих термов, и не существует путей в графе термов из R Int в S Int. Начальные вершины в графе Rel отметим как входные, а R Int - как выходные. Получим Ф-отношение, которое требуется развернуть в Ф-структуру.

Конституэнты типов X, C, Д, П назовем конституэнтами основного типа (или основными конституэнтами).

В дальнейшем через $[G_\lambda]$ обозначается множество стандартных имен конституэнт, фигурирующих в выражении $\overline{G}_\lambda$ конституэнты G_λ. Через $\max A_j$ обозначено множество конституэнт основного типа, имеющих максимальный уровень (определение уровня см.ниже) среди конституэнт, входящих в $[A_j]$.

Каждое из входных и выходных множеств Ф-отношений, рассматриваемых ниже, представляет собой область значений какой-либо конституэнты G_λ основного типа, и обозначается $X(G_\lambda)$ или $Y(G_\lambda)$ соответственно. Далее, для таких Ф-отноше-

38-3
т.2, л.10

ний φ используются следующие обозначения:

$out\,\varphi = \{G_\lambda : Y(G_\lambda)$ - выходное множество для $\varphi\}$;

$in\,\varphi = \{G_\lambda : X(G_\lambda)$ - входное множество для $\varphi\}$;

$R(\varphi)$ - собственно отношение, связывающее входы и выходы.

Дадим сначала один вариант решения этой задачи для случая, когда Rel совпадает со множеством всех конституэнт основного типа (и, следовательно, $R\,Int$ содержит все конечные вершины графа конституэнт основного типа).

Функция I. Разбиение конституэнт основного типа главного рода структуры на уровни.

Невычисляемые конституэнты, т.е. типов X, C, Д отнесем к уровню 0. Далее, если конституэнты уровня n уже определены, то отнесем к уровню $n+1$ те конституэнты, которые могут быть вычислены из конституэнт уровня $\leq n$ (т.е. все конституэнты в формальном выражении конституэнты уровня $n+1$ имеют уровень $\leq n$).

Функция 2. Построение исходной Ф-структуры.

Исходная Ф-структура индуцируется графом конституэнт основного типа главного рода структуры следующим образом.

С каждой конституэнтой G_λ основного типа свяжем Ф-отношение $\varphi(G_\lambda)$. Для выражаемой конституэнты G_λ входными множествами являются $X(G_\mu)$ такие, что $G_\mu \in [G_\lambda]$, а выходным множеством является $Y(G_\lambda)$, взятое столько раз, сколько имеется конституэнт (более высокого уровня), формальное выражение которых содержит имя конституэнты G_λ. Отношение $R(\varphi(G_\lambda))$ задается формальным выражением конституэнты G_λ. Для невыражаемой конституэнты G_λ выходные множества определяются таким же образом, как и для выражаемых, а входным множеством является множество $X(G_\lambda)$. Отношение $R(\varphi(G_\lambda))$ в этом случае является просто n-кратным тождественным отображением $X(G_\lambda) \to Y(G_\lambda)^{n(G_\lambda)}$ $(x \mapsto \langle x,\ldots,x\rangle)$

Исходная Ф-структура получается из построенного множества Ф-отношений склеиванием каждого из выходов $Y(G_\lambda)$ с некоторым входом $X(G_\lambda)$. При этом входы $X(G_\lambda)$ невыражаемых конституэнт G_λ не склеиваются ни с какими выходами.

По существу (а именно с точностью до нумерации выходов $Y(G_\lambda)$), указанное выше склеивание определено однозначно.

Основную роль при включении аксиом в конструируемую Ф-структуру играют операции склеивания по аксиоме.

Операция tog_A. Пусть задано конечное семейство Ф-отношений $\Omega=\{\varphi_i : i\in\{1,\dots,k\}\}$ таких, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{k}(out\,\varphi_i \cup in\,\varphi_i)$ определено и является множеством конституэнт (не обязательно всех) некоторого рода структуры. И пусть A_j - аксиома того же рода структуры. Результатом склеивания семейства Ф-отношений Ω по аксиоме A_j назовем Ф-отношение

$$\varphi = tog_{A_j}\Omega$$

где $out\,\varphi = \bigcup\limits_{i=1}^{k} out\,\varphi_i$, $in\,\varphi = \bigcup\limits_{i=1}^{k} in\,\varphi_i \cup fr\,A_j$

$fr\,A_j$ - множество областей значений конституэнт из $[A_j]$, которые не содержатся среди $\bigcup\limits_{i=1}^{k}(out\,\varphi_i \cup in\,\varphi_i)$, отношение $R(\varphi)$ определяется аксиомой $R(\varphi_1) \& \dots \& R(\varphi_k) \& A_j$.

Операция $Tog\,A$. Пусть имеется Ф-структура Ψ, состоящая из множества $\{\varphi_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ Ф-отношений таких, что множество $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(out\,\varphi_\lambda \cup in\,\varphi_\lambda)$ определено и является множеством конституэнт (не обязательно всех) некоторого рода структуры. И пусть A_j - аксиома того же рода структуры. Ф-структура $Tog_{A_j}\Psi$ получается из Ψ следующим образом. Положим

$$W_j = \{\varphi_\lambda : out\,\varphi_\lambda \cap max\,A_j \neq \emptyset\},$$

$$V_i = \{\varphi_\mu : fr\,A_j \cap out\,\varphi_\mu \neq \emptyset\}$$

где $fr\,A_j$ - множество областей значений конституэнт из $[A_j]$, которые не содержатся среди

$$\bigcup\limits_{\varphi_\lambda\in W_j}(out\,\varphi_\lambda \cup in\,\varphi_\lambda)$$

Семейство Ф-отношений W_j заменяется на Ф-отношение $tog_{A_j} W_j$. Каждое $\varphi_r \in V_j$ заменяется на $\tilde{\varphi}_r$, где $\tilde{\varphi}_r$ получается из φ_r добавлением дополнительных выходов $Y(G_i)$ для всех $G_i \in fr\, A_j \cap out\, \varphi_r$. Причем добавленные $Y(G_i)$ в φ_r в $Tog_{A_j} \Psi$ склеиваются с $X(G_i)$ из $Tog_{A_j} W_j$. Отметим, что $out\, \tilde{\varphi}_r = out\, \varphi_r$ сохраняется для всех $\varphi_r \in V_j$.

Функция 3. К построенной исходной Ф-структуре последовательно применяем операции $Tog_{A_1}, \ldots, Tog_{A_{N_A}}$.

В полученной Ф-структуре следует добавить в качестве элементов $Y(\varphi_\lambda)$ те элементы $R\,Int$, которые не являются выходными в свертке (чтобы $R\,Int = Y$ (свертки)). В результате получится требуемая Ф-структура, свертка которой сильнее Ф-отношения, определяемого разметкой. Результат не зависит от порядка аксиом.

Общий случай (множество Rel - произвольное).

В общем случае к процессу построения требуемой Ф-структуры добавляются дополнительные функции.

Функция 1Д. Построение релевантного множества Rel.

Вход: списки $R\,Int$ и $S\,Int$ без разрешающих конституэнт.

Выход: список Rel.

Выполняется также как и в случае R-интерпретации.

Функция 2Д. Разбиение аксиом главного рода структуры на три группы.

Разбиение производится по следующему признаку. Пусть

$$B_j = [A_j] \cap Rel$$

I-я группа: $A_1 = \{A_j : B_j = [A_j]\}$

2-я группа: $A_2 = \{A_j : B_j \neq [A_j] \,\&\, B_j \neq \varnothing\}$

3-ья группа: $A_3 = \{A_j : B_j = \varnothing\}$

Функция 3Д. Расширение множества Rel.

Вход: I) множество Rel;

2) список $ad\,R\,Int$, содержащийся в

$$\bigcup_{A_j \in A_2 \cup A_3} ([A_j] \setminus B_j) = \bigcup_{A_j \in A_2 \cup A_3} [A_j] \setminus Rel$$

Выход: I) измененное (расширенное) множество

$$\hat{Rel} \supset Rel \vee ad\,R\,Int$$

2) измененный список аксиом групп A_2 и A_3.

Функция 3Д - особый режим, когда

$$ad\,R\,Int = \bigcup_{A_j \in A_2 + A_3} [A_j] \setminus Rel$$

Функция 4Д. Замена аксиом.

Вход: I) список имен аксиом 2-ой и 3-ей групп, которые следует убрать из ГРС;

2) список выражений аксиом, содержащих имена конституэнт только из Rel, которые следует добавить в ГРС.

Выход: I) измененный текст ГРС;

2) измененные списки аксиом 2-ой и 3-ей групп.

Функция 4Д . Особый режим, когда убрать следует все аксиомы 2-ой и 3-ей групп и ничего не добавить.

Применением функций IД-4Д проектировщик добивается, что в ГРС остаются лишь аксиомы I-ой группы. После чего применяются (модифицированные) функции IМ, 2М, а затем функция 3.

Функция IМ.

Рассматриваются конституэнты только из множества Rel. К уровню 0 отнесем конституэнты типов Х, С, Д и из списка $S\,Int$. Остальные уровни определяются таким же образом, как и в функции I.

Функция 2М.

Отличие от функции 2 состоит в том, что построение проводится только для конституэнт множества Rel, и Ф-отношения $\varphi(G_\lambda)$ для конституэнт G_λ из множества $S\,Int$ строятся таким же образом, как для невыражаемых конституэнт.

3. Требования к блоку индуцированной интерпретации (БИИ)

3.1. Назначение БИИ

БИИ предназначена для формирования содержательной интерпретации (т.е. семантики) и R -интерпретации главного рода структуры (ГРС) в предположении, что базовые роды структур снабжены семантикой и/или R -интерпретацией. При этом в операционной схеме допускаются все операции кроме булеанизации.

Специфика процедуры состоит, во-первых, в том, что ГРС, его семантика и R -интерпретация могут формироваться параллельно, а, во-вторых, в возможности задания разметки (в частности, $A(\frac{z}{0})$) для формирования R -интерпретируемого ГРС на уровне базовых родов структур и дополнений.

3.2. Определения основных понятий

Определение I. Формальной операционной схемой называется операционная схема, вершинам графа которой сопоставлены имена текстов родов структур (или дополнений) без содержательной интерпретации и R -интерпретации.

Определение 2. Содержательной (или, что то же, семантической) операционной схемой называется операционная схема, каждой вершине графа которой сопоставлено имя текста, рода структуры (или дополнения) с содержательной интерпретацией (семантикой) конституэнт, но без R -интерпретации. При этом один и тот же текст рода структуры, снабженный двумя (или более) разными содержательными семантиками, соответствует двум разным (или более) вершинам графа и, следовательно, разным именам.

Определение 3. Интерпретируемой операционной схемой называется операционная схема, каждой вершине графа которой сопоставлено имя текста рода структуры (или дополнения) с содержательной семантикой и R -интерпретацией. При этом одному и тому же роду структуры даже с одной и той же содержательной семантикой, но с разными R-интерпретациями соответствуют разные вершины графа и разные имена.

Определение 4. Формальная и операционная схема Φ и содержательная операционная схема C называется когерентными, если существует гомоморфизм графа схемы C на граф схемы Φ, при которой каждая вершина с сопоставленной ей операцией и текстом рода структуры переходит в вершину с тем же текстом рода структуры и с той же операцией, а начальные вершины с дополнениями и отождествляющими отображениями переходит в вершины с теми же дополнениями и отождествляющими отображениями. Если гомоморфизм является изоморфизмом графов, то Φ и C называются изоморфно (или строго) когерентными.

Аналогично определяются когерентная интерпретируемая и содержательная операционные схемы через гомоморфизм интерпретируемой операционной схемы на содержательную.

Определение 5. Операционная схема (формальная, содержательная или интерпретируемая), не содержащая операции булеанизации, называется индуцированно интерпретируемой.

В дальнейшем при описании БИИ мы будем рассматривать только индуцированно интерпретируемые операционные схемы, не оговаривая это каждый раз особо.

Определение 6. Замыканием содержательной операционной схемы называется такое сопоставление его вершинам текстов родов структур и дополнений с семантикой, а также отождествляющих отображений, что выполнены два условия:

а) сопоставление является замыканием (без учета семантики) изоморфно когерентной формальной операционной схемы;

б) любая конституэнта любого текста рода структуры или дополнения имеет ту же семантику, что и ее Т-интерпретации (и, следовательно, антиинтерпретации), определяемые путями графа операционной схемы.

Определение 7. Замыканием интерпретируемой операционной схемы называется такое сопоставление ее вершинам текстов родов структур и дополнений с семантикой и R-интепретацией, что выполняются следующие два условия:

а) сопоставление является замыканием (без учета R -интерпретации) изоморфным когерентной содержательной операционной схеме;

б) каждая конституэнта имеет ту же R -интерпретацию, что и ее T -интерпретация (и, следовательно, антиинтерпретация) вдоль любого пути.

Определение 8. Базовое замыкание содержательной или интерпретируемой операционной схемы называется правильным, если оно может быть продолжено до замыкания всей операционной схемы.

Очевидно, необходимым и достаточным условием правильности базового замыкания является совпадение семантик и R -интерпретаций конституэнт базовых родов структур и дополнений, являющихся главными антиинтерпретациями:

а) базисного множества второго аргумента операции терм-вложения или родового усиления и соответствующего ему терма первого рода структуры;

б) родовой структуры второго аргумента родового усиления и соответствующего ей терма первого аргумента;

в) базисных множеств первого и второго аргумента операции смешанного или прямого произведения, отображающихся в одно и то же базисное множество результата этой операции.

3.5. Требования к программному комплексу БИИ

I. Программный комплекс БИИ должен быть программно совместим с программным комплексом ЛИБ.

2. Программный комплекс должен выполнять следующие машинные функции:

Функция I. Формирование главного рода структуры (ГРС) с семантикой.

Вход: I. Содержательная операционная схема C.
2. Правильное базовое замыкание схемы C.

Выход: I. Главный род структуры с семантикой.

Требование контроля: проверка правильности базового замыкания схемы С.

Требование к хранению: по запросу должен выпечатываться текст любого промежуточного рода структуры с семантикой.

Функция 2. Формирование ГРС с семантикой и R-интерпретацией.

Вход: I. Интерпретируемая операционная схема R.
2. Базовое замыкание схемы R .

Выход: I. ГРС с семантикой и R-интерпретацией.

Требование к контролю: проверка правильности базового замыкания схемы R;

Требование к хранению: по запросу должен выпечатываться текст любого промежуточного рода структуры с семантикой и R-интерпретацией.

Функция 3. Т-интерпретация конституэнт замкнутой содержательной операционной схемы.

Вход: I. Замкнутая содержательная операционная схема.
2. Список имен конституэнт промежуточного рода структуры С.
3. Путь с началом, отвечающим С.

Выход: I. Список образов данных конституэнт в виде конституэнт с семантикой при Т-интерпретации вдоль данного пути.
2. Список образов конституэнт при Т-интерпретации вдоль всех путей с началом, отвечающим С и с концом в конечной вершине операционной схемы.

Функция 4. Т-интерпретация конституэнт замкнутой интерпретируемой операционной схемы.

Функция 5. Анти~~И~~нтерпретация конституэнт замкнутой содержательной операционной схемы.

Функция 6. Антиинтерпретация ~~операционной схемы~~ конституэнт замкнутой интерпретируемой операционной схемы.

[38-2]
12,зн10

Функции 4, 5, 6 формируются аналогично функции 3.

4. Подстановка кортежей.

4.1. Содержание задачи и ее применения.

Вобщем виде задачу можно сформулировать следующим образом: даны выражения, определяющие одни понятия через другие. Требуется составить программу для ЭВМ, позволяющую получать на АЦПУ такие списки, как

а/ список исходных понятий, т.е. понятий, которые не выражаются через другие,

б/ список исходных понятий, через которые, в конечном счете, выражается некоторое данное понятие,

а также решать ряд других задач этого типа.

Очевидно, поставленная задача есть обобщение задач, возникающих при работе с графом термов рода структуры. Другое возможное использование состоит в работе с операционной схемой, где роль понятий играют имена родов структур и дополнений. Наконец, третье применение данная задача находит на предварительной стадии формирования операционной схемы, когда последняя намечается в общих чертах.

4.2. Соглашения и обозначения.

Для точной постановки задачи введем некоторые соглашения и обозначения.

4.2.1. Малой (строчной) латинской буквой с индексом или без индекса будем всегда обозначать понятие, которое дано своим термином или наименованием, т.е. алфавитноцифровой фразой. Разные буквы при этом могут обозначать одно и тоже понятие (т.е. одну и ту же фразу). Если a и b обозначают одно и то же понятие, то мы говорим что понятие a равно понятию b и пишем $a = b$.

4.2.2. Выражение вида $< a_1, \dots, a_N >$,т.е. упорядоченный набор понятий, называется кортежем, а натуральное число $N \geq 1$ – его длиной. Среди понятий $a_1, \dots, a_N$ могут быть и одинаковые. Два кортежа равны, если они имеют одинаковую длину и на одинаковых местах стоят равные понятия.

4.2.3. Выражение вида

$$X \simeq < X_1, \dots, X_N >$$

называется раскрытием понятия X через понятия $X_1, \dots, X_N$. При этом понятие X называется раскрываемым, а понятия $X_1, \dots, X_N$ – раскрывающими; кортеж $< X_1, \dots, X_N >$ также называется раскрывающим кортежем. Два раскрытия равны, если равные их раскрываемые понятия и раскрывающие кортежи.

4.2.4. Раскрытие вида

$$x \simeq < y_1, \dots, x, \dots, y_N >,$$

т.е. раскрытие, в котором одно и то же (или равные) понятия, является и раскрываемым и раскрывающим, называется порочным кругом.

4.2.5. С помощью заглавных (прописных) латинских букв и знака тождественного равенства ($\equiv$) будем выражать те или иные сокращенные обозначения. Например, выражения

$$X \equiv < x_1, \dots, x_N >, \qquad Y \equiv y \simeq < y_1, \dots, y_N >$$

38-9
Т.2,л.10

Означают, что через X обозначен кортеж $<x_1,\dots,x_N>$ а через Y обозначено раскрытие $y \simeq < y_1,\dots,y_N>$

§2.6. Пусть
$$X \equiv x \simeq < x_1,\dots,x_N>,$$
$$Y \equiv y \simeq < y_1,\dots,y_M>$$

Тогда через (X/Y) обозначается раскрытие, которое получается, если в раскрытии X вместо всех раскрывающих понятий (из числа $x_1,\dots,x_n$), равных понятию y, подставить выражение $y_1,\dots,y_M$.

При этом (X/Y) называется <u>композицией</u> раскрытий X и Y.

Если ни одно из раскрываемых понятий $x_1,\dots,x_N$ не равно Y, то считаем, что $X=(X/Y)$.

Если $X=(X/Y)$, то композиция называется <u>тривиальной</u>, в противном случае - <u>нетривиальной</u>.

Например, если
$$A \equiv a \simeq < b, c, b >$$
$$B \equiv b \simeq < c, d, d >$$
то
$$(A/B) \equiv a \simeq < c, d, d, c, c, d, d >$$

§2.7. Пусть P - некоторое множество раскрытий. Через $Q=Q(P)$ обозначим множество всех понятий, входящих в раскрытия из P (как в качестве раскрываемых, так и в качестве раскрывающих).

Множество P называется <u>правильным</u>, если выполняются следующие пять условий:

а) P - конечное непустое множество;

б) каждое понятие из Q является раскрываемым не более, чем в одном раскрытии;

38-9
T-8, XII-10

в) ни одно раскрытие из P не являются порочным кругом (см. п.4);

г) ни одно из раскрытий вида $(\ldots((X_1 | X_2) | X_3) | \ldots | X_N)$, где все $X_\lambda \in P \ (\lambda = 1, \ldots N)$ не являются порочным кругом (см. п.4);

д) в Q существует единственное понятие, которое является раскрываемым, но не является раскрывающим ни в одном раскрытии из P. Оно называется главным и обозначается через $q^{(0)}$.

1.2.8. Всюду в дальнейшем будем предполагать заданным некоторое фиксированное правильное множество раскрытий P. Понятие $X \in Q\ (P)$ называется исходным, если оно не является раскрываемым ни в одном раскрытии из P. Множество всех исходных понятий обозначим через $Q_{\text{и}} = Q_{\text{и}}(P)$. Для данного $q \in Q_{\text{и}}$ через $R(q)$ обозначим множество тех понятий, которые являются раскрываемыми в раскрытиях из раскрывающие кортежи которых содержат в качестве одной из компонент понятие q.

1.2.9. Графой, точнее, графой универсального документа проекта, назовем конечную последовательность упорядоченных пар "понятие-число"

$$(q_1, \gamma_1), (q_2 \gamma_2), \ldots, (q_N, \gamma_N)$$

удовлетворяющую следующим условиям:

а) $q_\lambda \in Q \quad (\lambda = 1, \ldots, N)$;

б) $q_1 = q^{(0)}$, т.е. q_1 – главное понятие;

в) $q_N \in Q_{\text{и}}$, т.е. q_N – исходное понятие;

г) $\gamma_1 = 1$

38-9
Т-2, лл.10

д) если $q_\lambda \simeq \langle q^1_\lambda, \ldots, q^T_\lambda \rangle \in D$, то $q_{\lambda+1} = q^{\gamma_{\lambda+1}}$
следовательно, $1 \leq \gamma_{\lambda+1} \leq T (\lambda = 1, \ldots N-1)$, т.е. q_λ и $q_{\lambda+1}$ – соответственно раскрываемое и раскрывающее понятия в одном и том же раскрытии, множества D, причем $q_{\lambda+1}$ в соответствующем раскрывающем кортеже стоит на $\gamma_{\lambda+1}$ – месте.

Множество граф обозначим через Γ.

<u>Замечание.</u> Очевидно, последовательность $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ однозначно определяет графу $(q_1, \gamma_1), \ldots (q_n, \gamma_n)$, т.е. разные графы имеют разные последовательности чисел.

4.2.10. Отношение $\tau = |\Gamma| / |Q_N|$ называется коэффициентом развертывания ($|X|$ – число элементов конечного множества X).

4.2.11. На множестве Γ определим лексикографически отношение порядка „$\angle$" (точнее строгого совершенного порядка). Более подробно, пусть $X \equiv (q_1, \gamma_1), \ldots, (q_N, \gamma_N)$,

$$Y \equiv (q'_1, \gamma'_1), \ldots, (q'_{N'}, \gamma'_{N'}) -$$

две произвольные различные графы.
Тогда существует единственное натуральное число $\omega = \omega(X, Y)$ такое, что

а) $1 \leq \omega < \min\{N, N'\}$;

б) $(q_\lambda, \gamma_\lambda) = (q'_\lambda, \gamma'_\lambda)$ при $\lambda = 1, \ldots, \omega$ (т.е. $q_\lambda = q'_\lambda$ и $\gamma_\lambda = \gamma'_\lambda$)

в) $\gamma_{\omega+1} \neq \gamma'_{\omega+1}$

<u>Замечание.</u> В условии б) достаточно требовать, чтобы $\gamma_\lambda = \gamma'_\lambda$. Очевидно, $q_{\omega+1}$ и $q'_{\omega+1}$ являются компонентами того единственного кортежа, который является раскрывающим для раскрываемого понятия $q_\omega = q'_\omega$. Обозначим этот кортеж через $K(X, Y)$

38-2
т-2, кн-10

По определению $X<Y$ тогда и только тогда, когда понятие стоит в кортеже $K(X,Y)$ "левее" понятия $q'_{\omega+1}$. Другими словами, $X<Y \Leftrightarrow \gamma_{\omega+1}<\gamma'_{\omega+1}$. Очевидно, введенное отношение "$\angle$" действительно является отношением строгого совершенного порядка.

Множество граф Γ вместе с введенным отношением порядка называется полным развертыванием главного понятия и обозначается через $\bar{\Gamma}$ (т.е. $\bar{\Gamma}=(\Gamma,<)$)

§2.12. Пусть дана графа

$$X\equiv(q_1,\gamma_1),\dots,(q_N,\gamma_N)$$

и понятие $q\in Q$, причем $q=q_\lambda$ при некотором $\lambda=1,\dots,N$ (очевидно, такое λ единственно). Рассмотрим последовательность $Y=Y(X,q)=(q_{\lambda+1},\gamma_{\lambda+1}),\dots,(q_N,\gamma_N)$

Определим теперь множество

$$\Gamma(q)=\{Y(X,q)\mid X\in\Gamma\}$$

и введем на нем аналогичное отношение порядка. Именно если даны две разные последовательности из $\Gamma(q)$:

$$Y\equiv(q_1,\gamma_1),\dots,(q_N,\gamma_N)$$

$$Y'\equiv(q'_1,\gamma'_1),\dots,(q'_N,\gamma'_N)$$

где $q_1=q'_1=q$, $\gamma_1=\gamma'_1=1$ то

$Y<Y'\Leftrightarrow\gamma_\lambda=\gamma'_\lambda$ при $\lambda=1,\dots,\omega$, а $\gamma_{\omega+1}<\gamma'_{\omega+1}$

Множество $\Gamma(q)$ вместе с отношением порядка называется полным развертыванием понятия q, а его элементы – графами документа, определяющего понятие q. Полное развертывание понятия q обозначается через $\bar{\Gamma}(q)$

§3. Требования к программам.

§3.1. <u>Формулировка задачи.</u>

Дано правильное множество раскрытий P.

Требуется

1^0. Составить список граф $\overline{\Gamma}$ – полное развертывание главного понятия (см.п.II.);

2_0. Составить список исходных понятий Q_y; порядок элементов в списке – произвольный (см.п.8.);

3^0: Для каждого исходного понятия $q \in Q_y$ построить список понятий $R(q)$; порядок элементов в списке – произвольный (см.п.8.).

4^0. Для каждого исходного понятия $q \in Q_y$ найти количество всех компонент, раскрывающих кортежей всех раскрытий из P , которые равны q . Это число называется числом вхождений понятия q ;

5^0. Вычислить коэффициент развертывания η (см.п.IO).

6^0. По запросу для данного понятия $q \in Q$ построить список $\overline{\Gamma}(q)$ – полное развертывание понятия q (см. п.I2).

I3.2. Входные и выходные формы.

Множество P представляется в следующем виде:

Форма I.

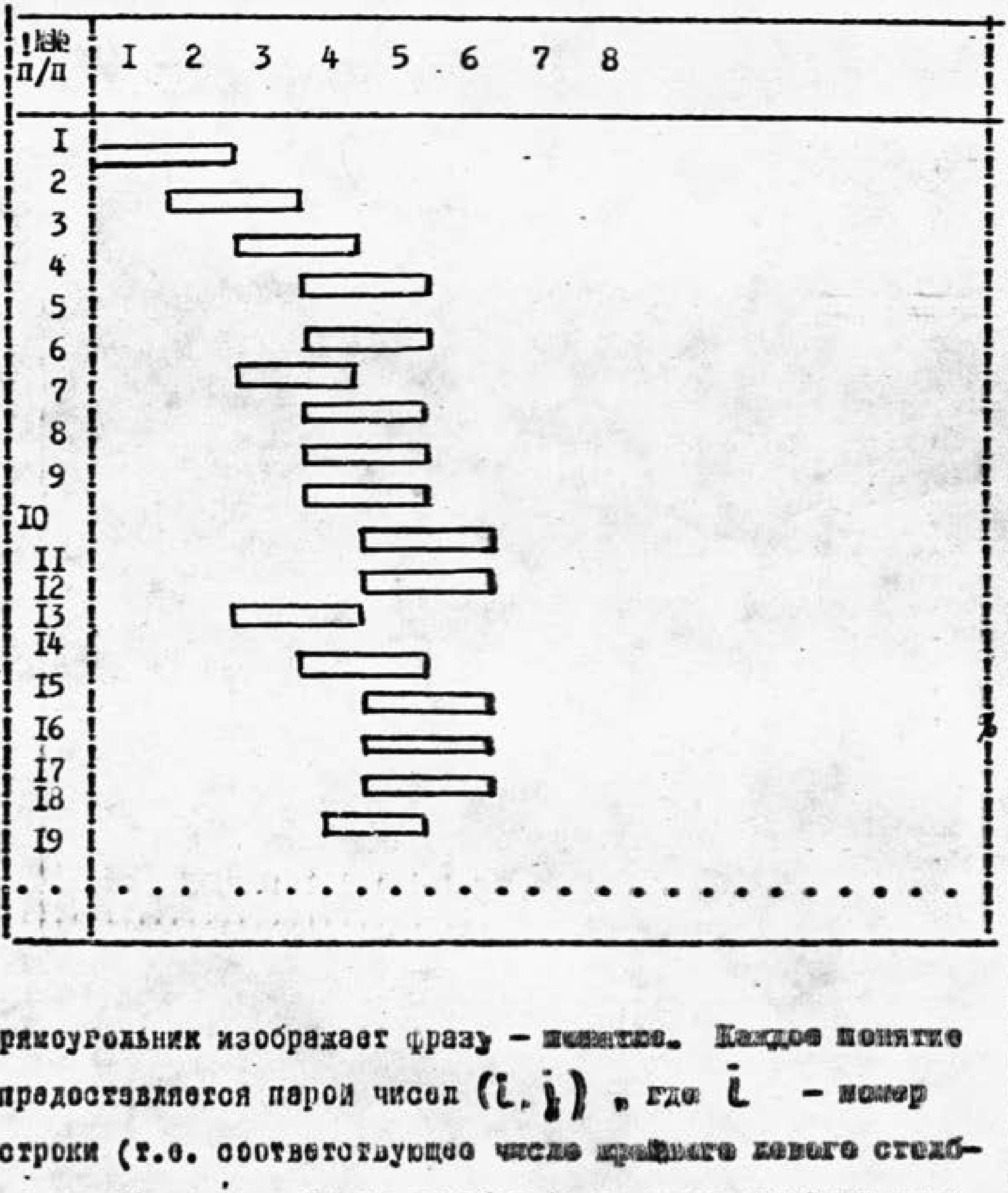
Правильное множество раскрытий.

№№ п/п	Раскрываемое понятие	Раскрывающие понятия				
		I	2	....	7	–
I						
• • • • •						

Результаты решения задачи 2^{0} представляются в следующем виде:

<u>форма 2.</u>

<u>Полное развертывание главного понятия</u>



Прямоугольник изображает фразу – понятие. Каждое понятие представляется парой чисел (i, j), где i – номер строки (т.е. соответствующее число крайнего левого столбца чисел), а j – номер столбца (т.е. число крайней верхней строки, под которым стоит начальный знак фразы).

[38-9]
Т.2, лл.10

Заполнение формы 2 определим индуктивно по номеру строки. В каждой строке стоит только одно понятие. Понятие (I,I) – главное. Пусть понятия $q_1, \dots q_i$ уже определены, причем понятие q_k стоит на месте (k, j_k). Понятие q_{i+1}, стоящее на месте $(i+1, j_{i+1})$ и число j_{i+1} определим следующим образом: если понятие q_i – раскрываемое, то q_{i+1} – первая компонента его раскрывающего кортежа (т.е. $q_i \simeq \langle q_{i+1}, \dots \rangle \in P$); если понятие q_i – исходное, то определим число k_0 условием: соотношение $q_{k-1} \simeq \langle , \dots q_k \rangle \in P$ верно при $k > k_0$ и неверно при $k = k_0$ $(k = 1, 2, \dots i)$. Другими словами, k_0 – таково, что q_{k_0} –первый из элементов последовательности

$$q_i, q_{i-1}, \dots, q_1,$$

который не является последней компонентой кортежа в раскрытии из P для следующего за ним элемента (раскрываемого). Теперь по определению, q_{i+1} – следующая за q_{k_0} компонента кортежа в раскрытии из P для раскрываемого понятия

$$q_{k_0-1}, \text{ а } j_{i+1} = j_{k_0}$$

Максимальная последовательность понятий вида

$$(i_1, 1), (i_2, 2), (i_3, 3), \dots, (i_N, N),$$

где $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_N$, представляет графу из Γ; если для любого понятия $(p, k) (k = 1, \dots, N-1)$ $p > i_k \Rightarrow p > i_{k+1}$. При этом порядок в Γ соответствует лексикографическому упорядочению таких последовательностей по номерам строк последних элементов, т.е. чисел вида i_N.

Результаты решения задач 2°, 3°, 4° представляются в следующем виде (множество $R(q)$ представлено номерами соответствующих раскрытий из P):

38-9
Т.2, кн.10

Форма 3.

Исходные понятия и их вхождения.

№№ п/п	исходное понятие	число вхождений	номера раскрытий из множества			
			1	2	. . .	35
I						
.						
.						
.						

Результат решения задачи 5^0 представляется в следующем виде:

Форма 4

Коэффициент развертывания

кол-во граф	кол-во исходных понятий	коэффициент развертывания

Результат решения задачи 6^0 представляется в виде формы 5 "Полное развертывание понятия q ", аналогичной форме 2, причем на месте (1,1) стоит данное понятие q .

4.3.3. Оценка пар тров задачи.

Параметры задачи следующие:

I) наименование понятия -до 30 знаков;

2) длина кортежа (в раскрытиях из множества P) - от 2 до 10

3) количество элементо (раскрытий) множества P - до 99

4) количество элементов (т.е. исходных понятий) множества - до 100

5) количество раскрытий из P, содержащих данное исходное понятие - до 30

4.4. Постановка задачи в терминах теории графов.

Определение I. Ориентированный мультиграф (или просто мультиграф) $G = G(A, V, \tau)$ - это отображение $\tau : A \to V \times V$ где A - множество дуг, V - множество вершин, причем если $(v_1, v_2) \in V \times V$, то $|\tau^{-1}(v_1, v_2)| \geq 1$, т.е. из вершины v_1 в вершину v_2 может идти несколько дуг.

Определение 2. Упорядоченный мультиграф $\bar{G} = \bar{G}(G, \varphi)$ - это мультиграф G вместе с заданным отображением $\varphi : A \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющим следующему условию: $\forall v \in V$: $\varphi_v =$ $= \varphi|(P\circ\tau)^{-1}(v) : (P\circ\tau)^{-1}(v) \to \mathbb{Z}^+|(P\circ\tau)^{-1}(v)|$ есть биекции, где $P : V \times V \to V$ проекция на первый сомножитель. Это означает, что на множестве всех дуг, выходящих из вершины v, определено отношение строгого совершенного (т.е. линейного) порядка: $c_1 < c_2$, если $\varphi(c_1) < \varphi(c_2)$, где $c_1, c_2 \in A$

Пусть G упорядоченный мультиграф и $q : V \times V \to V$ проекция на второй сомножитель. Путь - это последовательность

дуг $(c_1, \dots, c_n)$
такая, что $(q_0 \tau)(c_i) = (p_0 \tau)(c_{i+1})$
для всех $i = 1, \dots, n-1$

На множестве путей, выходящих из заданной вершины v, введем отношение лексикографического упорядочения. Именно, пусть $(c_1, \dots c_n), (c'_1, \dots, c'_m)$ – два пути такие, что $(p_0 \tau)(c_1) = (p_0 \tau)(c'_1)$ тогда $(c'_1 \dots c'_m) < (c_1, \dots, c_n)$ если, либо существует i_0 такое, что $c'_{i_0} < c_{i_0}$, причем $c'_i = c_i$ для всех $i < i_0$, либо $m < n$ и $c'_i = c_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Определение 3. Вершина $v \in V$ называется начальной, если $(q_0 \tau)^{-1}(v) = \emptyset$ вершина называется конечной, если $(p_0 \tau)^{-1}(v) = \emptyset$. Путь $(c_1, \dots c_n)$, где $(p_0 \tau)(c_1) = (q_0 \tau)(c_n)$ называется контуром.

Определение 4. Ориентированный мультиграф без контуров с одной начальной вершиной будем называть правильным.

Определение 5. Правильный упорядоченный мультигрф будем называть мультиграфом раскрытий. Пусть $\bar{G}$ мультиграф раскрытий, поставим в соответствие $\bar{G}$ правильное множество раскрытий $P(\bar{G})$ следующим образом:

$$P(\bar{G}) = \{ v \simeq \langle v_1, \dots, v_n \rangle \mid v \in V \wedge n = |(p_0 \tau)^{-1}(v)| \wedge$$
$$\forall i : v_i = \mathcal{Y}_v(i) \}$$

Очевидно, отображение $\bar{G} \to P(\bar{G})$ является взаимнооднозначным соответствием между множеством всех мультиграфов раскрытий и семейством всех правильных множеств раскрытий (с точностью до изоморфизма).

4. 5. Формулировка задачи.

Пусть дан мультиграф раскрытий $\bar{G} = G(G, \mathcal{Y})$

38-9
T.2 кн 10

где $G = G(A, V, \tau)$, своим правильным множеством раскрытий $P(\bar{G})$.

Требуется:

1^0. Составить лексикографически упорядоченный список всех путей, исходящих из начальной вершины и представить его в виде формы 2. При этом множество максимальных путей интерпретируется как множество граф $\bar{\Gamma}(P(\bar{G}))$

2^0. Составить список конечных вершин. Конечная вершина интерпретируется как исходное понятие в $P(G)$.

3^0. Для каждой конечной вершины $v \in V$ составить список вершин, непосредственно предшествующих данной вершине v, т.е. описание множества $(p \circ \tau)[(q \circ \tau)^{-1}(v)]$ (это равносильно п. 3^0 на стр...).

4^0. Для каждой конечной вершины $v \in V$ найти $|(q \circ \tau)^{-1}(v)|$, т.е. число дуг, входящих в данную вершину. Это число интерпретируется как число вхождений понятия v в $P(G)$. Обозначим через $\Gamma(G)$ множество всех максимальных путей, исходящих из начальной вершины и через $Q_y(G)$ множество всех конечных вершин. Число $h(G) = |\Gamma(G)| / |Q_y(G)|$ называется коэффициентом развертывания. Очевидно

$$\Gamma(G) = \Gamma(P(G)), \quad Q_y(G) = Q_y(P(G)),$$
$$h(G) = h(P(G))$$

5^0. Вычислить коэффициент развертывания h.

6^0. По запросу для данной вершины $v \in V$ составить лексикографически упорядоченный список всех путей, исходящих из вершины v и представить в виде формы 2.

4.6. Алгоритм формирования формы 2 при целом объеме исходной информации.

В настоящем пункте представлен алгоритм формирования множества всех путей с началом в данной вершине (для определенности – в начальной вершине мультиграфа G), которые представляются затем в виде формы 2. Принцип работы алгоритма отличен от того, который использован при описании формы 2. Именно, согласно описанию формы 2, пути формируются "построчно", тогда как в настоящем пункте – по столбцам формы 2. Заметим, что сдвиг вправо (т.е. номер столбца) соответствует длине пути.

При описании алгоритма используются введенные обозначения и терминология языка мультиграфов.

Исходная информация содержится в массиве γ в виде таблицы со строками переменной длины от 2 до $m+1$:

v	v_1	,....,	v_n

В качестве элементов таблицы стоят коды (названия) вершин. Последовательность $v, v_1, \dots, v_n$, стоящая в какой-либо строке таблицы, соответствует последовательности дуг $c_1, \dots, c_n$ такой, что $\tau(c_i)=(v\, v_i)$ и $\gamma(c_i)=i$, причем $\{c_1, \dots, c_n\}=(\rho\circ\tau)^{-1}(v)$

В первой строке первого столбца стоит начальная вершина мультиграфа G , а первый столбец представляет собой множество $\rho\circ\tau(A)$. Этими условиями массив γ характеризуется полностью.

Исходные константы:

d -верхняя граница множества длин всех путей;

m -верхняя граница числа дуг с началом в данной вершине $v \in V$, т.е. $m \geq |(p \circ \tau)^{-1}(v)|$ для любой вершины.

Эти константы должны удовлетворять условию:

$$m^d \leq 2 \cdot 10^4$$

Целью работы алгоритма является формирование массива M, который выводится на печать.

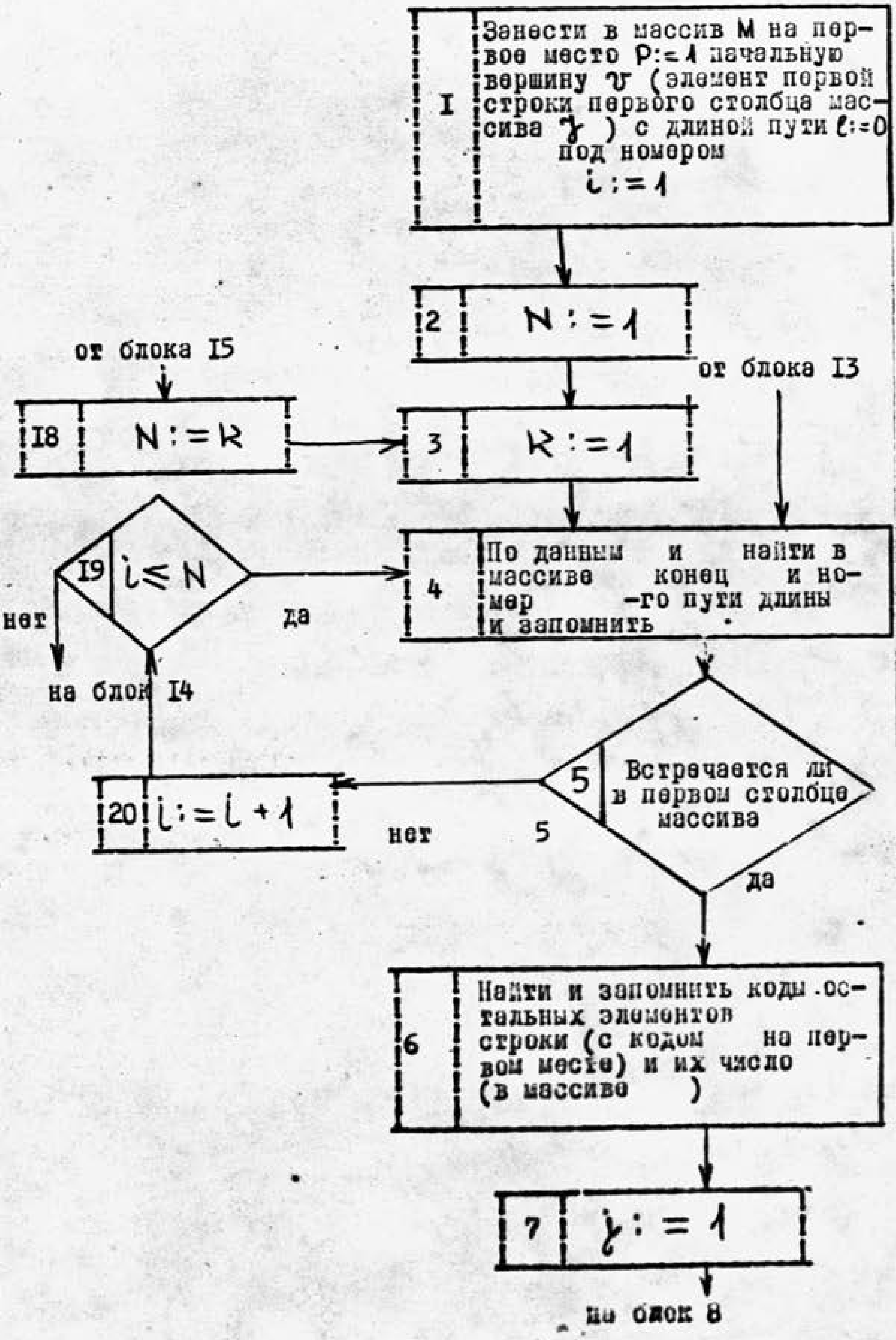
Массив M - это по существу массив всех путей с началом в начальной вершине мультиграфа G, каждый из которых представлен своей конечной вершиной v, длиной ℓ и номером i. Более точно, элементом массива является упорядоченная четверка: (ρ, ℓ, i, v), где

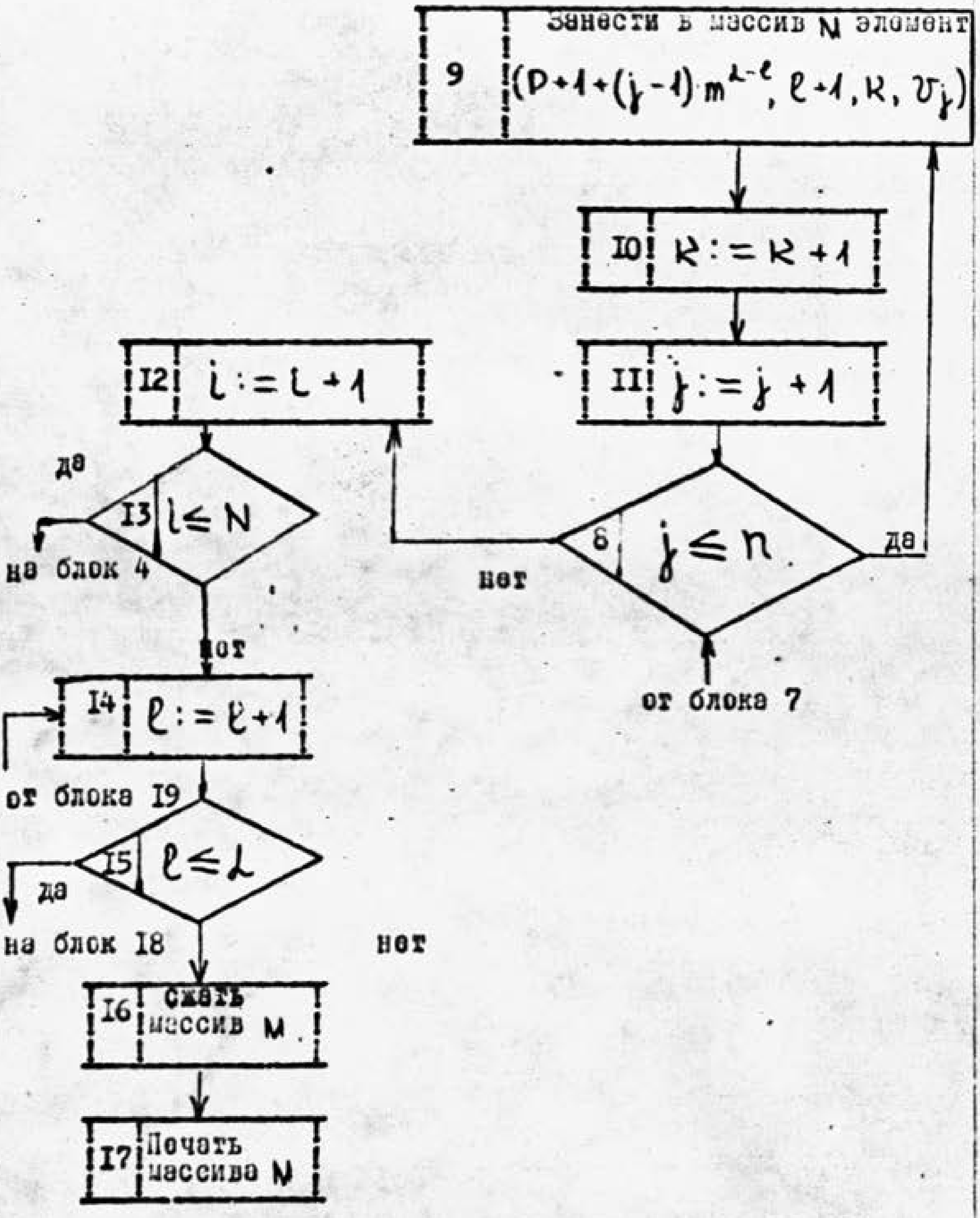
ρ -номер элемента массива по порядку расположения в массиве с учетом и пустых строк;

ℓ -длина пути с началом в начальной вершине мультиграфа G и с концом в вершине v (v - код конечной вершины пути);

i - номер пути относительно упорядоченности, индуцируемой на множестве путей длины ℓ, введенной выше лексикографической упорядоченностью.

После формирования массив M сжимается, (т.е. из него выбрасываются пустые строки) и выводится на печать в виде формы 2.


I
Занести в массив M на первое место $P:=1$ начальную вершину v (элемент первой строки первого столбца массива γ) с длиной пути $\ell:=0$ под номером $i:=1$
2
$N:=1$
от блока I5
I8
$N:=k$
3
$k:=1$
от блока I3
I9
$i \leq N$
нет
да
на блок I4
4
По данным и найти в массиве конец и номер -го пути длины и запомнить
5
Встречается ли в первом столбце массива
20
$i:=i+1$
нет
5
да
6
Найти и запомнить коды остальных элементов строки (с кодом на первом месте) и их число (в массиве)
7
$\gamma:=1$
на блок 8


9
Занести в массив N элемент
(p+1+(j-1)·m^{L-l}, l+1, k, v_j)
10 k := k + 1
11 j := j + 1
8 j ≤ n
да
нет
от блока 7
12 i := i + 1
13 i ≤ N
да
на блок 4
нет
14 l := l + 1
от блока 19
15 l ≤ L
да
на блок 18
нет
16 Сжать массив M
17 Печать массива N

5. Теоретико - множественные операции.

5.1. Назначение математических алгоритмов теоретико-множественных операций и форма их представления.

Математические алгоритмы, представленные в настоящем разделе предназначены для библиотеки программ, реализующих

- интерпретацию основных конституэнт (теоретико - множественных операций).

В описании каждого математического алгоритма содержится математическая постановка задачи, входная и выходная информация. В ряде случаев блок-схема алгоритма не приводится вследствие ее простоты и зависимости от конкретных условий разработки программ. В более сложных случаях приведены необходимые блок-схемы алгоритмов.

5.2. Состав математических алгоритмов.

- построение прямого произведения,
- построение прямого произведения с заданными порядками сомножителей,
- построение подсписка,
- построение отношения,
- построение пересечения множеств,
- построение объединения множеств /простое/,
- построение полного объединения множеств,
- построение разности множеств,
- построение сечения отношения,
- построение проекции отношения,
- построение обобщенного сечения отношения,

- построение проекции обобщенного сечения,
- построение множества всех подмножеств.

§3. Теоретико - множественные операции.

Задача I. Прямое произведение.

Дан комплект $K = \{C_i \mid i = 1, \dots N_K\}$ списков $C_i = \{C_i^{\lambda_i} \mid \lambda_i = 1, \dots N_{C_i}\}$, где

N_K - число списков,

N_{C_i} - число элементов в i- том списке,

$C_i^{\lambda_i}$ - элемент i-того списка с номером λ_i,

Название комплекта - до 30 алфавитно - цифровых знаков.
Название каждого списка - до 20 алфавитно- цифр. знаков.
Название списка $\overline{C}$, который требуется составить - до 20 алфавитно-цифровых знаков.
Название элемента списка - до I2 алфавитно-цифр. знаков.

Требуется составить список $\overline{C} = \prod_{i=1}^{N_K} C_i = C_1 \times \dots C_{N_K}$ - прямое произведение списков C_i, который определяется с помощью лексикогрфического упорядочения следующим образом:

а/ элемент $C \in \overline{C}$ есть упорядоченная последовательность $C = (C_1^{\lambda_1}, \dots C_{N_K}^{\lambda_{N_K}})$, где $C_i^{\lambda_i} \in C_i$, так что
$\overline{C} = \{(C_1^{\lambda_1}, \dots C_{N_K}^{\lambda_{N_K}}) \mid C_i^{\lambda_i} \in C_i\,;\ i = 1, \dots N_K;\ \lambda_i = 1, \dots N_{C_i}\}$

Таким образом, число элементов списка $\overline{C}$ есть $N_{\overline{C}} = \prod_{i=1}^{N_K} N_{C_i}$

б/ название элемента $C \in \overline{C}$ образуется последовательной записью элементов $C_i^{\lambda_i}$ с одним или несколькими пробелами между ними - /см. форму I.3/;

в/ название списка $\overline{C}$ - до 20 алфавитно-цифр. знаков;

г/ элементы $C \in \overline{C}$ упорядочиваются по следующему правилу:

элемент $C=(C_1^{\lambda_1}\dots C_{NK}^{\lambda_{NK}})$ стоит раньше элемента $C'=(C_1^{\lambda'_1}\dots C_{NK}^{\lambda'_{NK}})$, если либо $\lambda_1<\lambda'_1$, либо $\lambda_i=\lambda'_i$ при $i\leq i_0$, где $i_0<NK$, но $\lambda_{i_0+1}<\lambda'_{i_0+1}$.

Исходная информация представляется в следующем виде:

Форма I.I.

(шифр комплекта)
(5 знаков)

(название комплекта)

№№ пп	(Название списка)
I	
. . .	
Nк	
Nк+1	(здесь должно стоять название списка $\overline{C}$)

Форма I.2.

(номер списка)

(шифр комплекта)

(название списка)

№№ пп	(общее название элемента списка)
I	
. .	
Nci	

38-3
Т-2,экз10

Выходная информация имеет следующий вид:

Форма I.3.

(шифр комплекта)

(Название списка $\overline{C}$)

№№ пп	(Общее название элементов списков C_i)		
	I	. . .	N_k
I			
. . .			
$N\overline{C}$			

Задача I<u>a</u>. Прямые произведения с заданными порядками сомножителей (многоаспектовое прямое произведение).

Дан комплект $k = \{C_i \mid i = 1, \dots, N_k\}$ списков $C_i = \{c_i^\lambda \mid \lambda = 1, \dots, N_{C_i}\}$, где $N_k, N_{C_i}, C_i, c_i^\lambda$ те же, что в задаче I, а также набор сюръективных отображений:

$$\sigma_\lambda : \{1, \dots, N_k\} \to k,\ \lambda = 1, \dots, r$$

Требуется составить комплект $D = \{\overline{C}_\lambda \mid \lambda = 1, \dots r\}$ списков $\overline{C}_\lambda = \prod_{i=1}^{N_k} \sigma_\lambda(i)$ (т.е. решить задачу I для каждого упорядочения σ_λ сомножителей $C_{i_s} = \sigma_\lambda(s)$)

Исходная информация представляется в следующем виде:

Форма I<u>a</u>.I., отличающаяся от формы I.I. только тем, что не содержит последней строки (т.е. имеет N_k строк).

Форма I<u>a</u>.2., совпадающая с формой I.2.

Форма I^{а} 3.

(Шифр комплекта k)

(Шифр комплекта p)

(Название комплекта p)

№№ п/п	Упорядочение δ_{λ}	Название списка $\overline{C}_{\lambda}$
I	$i_1 \cdots i_{N_k}$	....
...	....	....
τ		

Примечание: во второй графе в λ-той строке стоит последовательность номеров i_k списков C_{i_k} в том порядке, который определяется отображением δ_{λ} , т.е. $C_{i_s} = \delta_{\lambda}(s)$

Выходная информация представляется в следующем виде:

Форма I^{а}.4.

(шифр комплекта k)

(шифр комплекта p)

(номер списка $\overline{C}_{\lambda}$)

(название списка $\overline{C}_{\lambda}$)

старый номер списка	номер списка	....	номер списка
новый номер списка	I	....	N_k
№№ п/п	Общее название эл-та списка C_{i_1} или самого списка	....	Общее назв. эл-та списка $C_{i_{N_k}}$ или самого списка
I	назв.эл-та C_{i_1}	....	назв.эл-та $C_{i_{N_k}}$
....	....	....	....
$N_{\overline{C}_{\lambda}}$	назв. эл-та $C_{i_1}^{N_{C_{i_1}}}$	....	назв.эл-та $C_{i_{N_k}}^{N_{C_{i_{N_k}}}}$

38-3
т.8, рис.10

Задача 2. Подсписок

Дан список $C=\{C_i \mid i=1,..N_c\}$ и некоторый признак $P(x)$ (предикат).

Требуется составить список $\bar{C}=\{C_i \in C \mid P(C_i)\}$ подсписок списка C элементов, удовлетворяющему заданному признаку $P(x)$. При этом порядок элементов сохраняется. Название подсписка - до 20 алфавитно - цифровых знаков.

Исходная информация представляется в следующем виде:

Форма 2.I.

(шифр списка)
(5 знаков)

(название списка)

№№ п/п	Название элемента списка
I . . . N_c	
описание признака	
(название подсписка)	

Выходная форма должна иметь следующий вид:

Форма 2.2.

(шифр списка)

(название подсписка)

№№ пп	Название элемента подсписка
I	
.	
.	
$N\overline{C}$	

Примеры признака $P(x)$.

1. Номер элемента – четное число.
2. Заданное количество первых элементов.
3. Элементы с заданными номерами.
4. Элементы, на определенных местах названия которых стоят определенные знаки.

<u>Замечание.</u> В программе требуется предусмотреть только обращение к блоку, обрабатывающему признак.

<u>Задача № 3.</u> <u>Отношение</u>

Исходная информация та же, что в задаче I, а также некоторый признак $P(x)$. Требуется составить отношение, т.е. список $\overline{C}$ – подсписок списка $\overline{C}$ элементов, удовлетворяющих заданному признаку $P(x)$.

Исходная информация:

<u>Форма 3.I.</u>

____
(шифр комплекта)

____
(название комплекта)

№ п/п	Название списка
I . . . N_K	
N_K+1	(Здесь должно стоять название отношения $\overline{C}$)
	(описание признака)

<u>Форма 3.2.</u> (совпадает с формой I.2. кроме номера формы).

Выходная информация выдается по форме 3.3., которая совпадает с формой I.3. (кроме номера формы и шапки, где стоит название списка $\overline{C}$ вместо C).

<u>Задача 4.</u> <u>Пересечение</u>

Дан комплект $K=\{C_i \mid i=1,\dots N_K\}$, списков $C_i=\{C_i^{s_i} \mid s_i=1,\dots N_{C_i}\}$. Требуется составить список - пересечение списков $C=\bigcap_{i=1}^{N_K} C_i$, который определяется следующим образом:

А) $c\in\hat{C}$,если элемент c входит в каждый из списков C_i ;

б) упорядочение элементов в $\hat{C}$ такое же, как в C_1. Название списка $\hat{C}$ - до 20 знаков.

Исходная информация представляется в виде форм 4.I. и 4.2., совпадающих с формами I.I. и I.2., а выходная - в виде формы 4.3., которая совпадает с формой 2.2.

<u>Замечание I.</u> В форме 4.I. под номером N_k+1 стоит название пересечения.

Замечание 2. В форме 4.3. в шапке стоит название пересечения.

<u>Задача 5.</u> <u>Объединение (простое)</u>

Дан комплект k списков C_i. Требуется составить список $\check{C}=\bigcup\limits_{i=1}^{N_k} C_i$ - объединение списков C_i, который определяется следующим образом:

а) $c \in \check{C}$, если c входит, по крайней мере, в один из списков C_i. При этом если элемент c входит в несколько списков C_i, то в список $\check{C}$ он включается один раз (в каждом списке C_i каждый элемент повторяется не более одного раза);

б) упорядочение элементов списка $\check{C}$ определяется следующим алгоритмом составления списка $\check{C}$: сначала включаются все элементы списка C_1 в том же порядке, затем - недостающие элементы списка C_2 в том же порядке, как они стоят в списке C_2 и т.д.

Формы 5.I. и 5.2. исходной информации и форма 5.3. выходной информации - те же, что формы I.I.,I.2.,2.2. (см. замечания I. и 2. в задаче 4).

38-9

Т.2,кн.10

Задача 5. **Полное объединение**

Дан комплект K списков C_i. Требуется составить список $\breve{C}=\breve{\bigcup}_{i=1}^{N_K} C_i$ – полное объединение списков C_i. Алгоритм составления списка $\breve{C}$ – следующий. Сначала в список $\breve{C}$ включаются все элементы списка C_1 (в том же порядке, как они стоят в C_1), затем – элементы списка C_2 (в том же порядке, как они стоят в списке C_2) независимо от того, включен уже тот или иной элемент в список $\breve{C}$ или нет и т.д. Таким образом, в списке $\breve{C}$ могут оказаться элементы с одинаковыми названиями, но все элементы списка $\breve{C}$ должны иметь разные номера.

Формы 6.I., 6.2.,6.3. аналогичны формам I.I.,I.2., 2.2. (см. замечания задачи 4).

Задача 7. **Разность**

Дан комплект двух списков C_1 и C_2. Требуется составить список $C=C_1\setminus C_2$ – разность списков C_1 и C_2, который включает те и только те элементы списка C_1 (с сохранением порядка), которые не принадлежат списку C_2.

Формы 7.I., 7.2. и 7.3. аналогичны формам I.I., I.2. и 2.2. (см. замечания задачи 4).

Задача 8. **Сечение.**

Дан комплект $K=\{C_i \mid i=1,\dots N_K\}$ списков C_i и номера $\lambda_{i_1},\dots \lambda_{i_n}$. Требуется составить список C – отношение со следующим признаком: на i_k-том месте в записи элемента $c=(c_1^{\lambda_1},\dots c_{N_K}^{\lambda_{N_K}})\in C$ может стоять только элемент $c_{i_k}^{\lambda_{i_k}}$ с данным номером λ_{i_k}, где $k=1\dots n$

Исходная информация представляется в виде:

форма 8.I.

(шифр комплекта)

(название комплекта)

№№ пп	название списка	номер фиксируемого элемента
I		
i_1		λi_1
i_k		λi_k
i_n		λi_n
N_k		
N_k+1	(здесь стоит название сечения C)	

форма 8.2. (совпадает с формой I.2.)

Выходная информация выдается по форме 8.3., имеющей тот же вид, что и форма I.3.

Задача 9. Проекция.

Дан список $\overline{C}=\prod_{i=1}^{N_k} C_i$ - прямое произведение списков C_i и список номеров $i_1, \dots i_n, i_1 < \dots < i_n$, и $n < N_k$. Требуется составить список $\overline{C}=\prod_{k=1} C_{i_k}$ - прямое произведение списков $C_{i_1} \cdots C_{i_k}$ (образующих уменьшенный комплект), которое называется проекцией $\overline{C}$ на произведение сомножителей C_{i_k}.

Исходная информация дается в следующем виде:

Форма 9.I., совпадающая с формой I.3., но вместо шифра комплекта слева указывается шифр списка $\overline{C}$ справа.

Форма 9.2.

(шифр списка $\overline{C}$)

(Название уменьшенного комплекта)

№№ пп	№ из комплекта K	Название списка
I	i_1	
n	i_n	(здесь стоит название проекции $\overline{C}$)
$n+1$		

Выходная информация выдается по форме 9.3., имеющей тот же вид, что и форма I.3., но в шапке указывается шифр списка $\overline{C}$ (вместо шифра комплекта K).

Замечание. В форме 9.2. либо вторая, либо третья графа может быть не заполнена.

Задача IO. Обобщенное сечение.

Дан комплект K списков C_i, признак P_0 и список P признаков $P_k (k=1,\dots N_P)$ с соответствующей ему последовательностью номеров $i_1,\dots,i_{N_P}$. Требуется составить обобщенное сечение списков C_i т.е. список C, содержащий множество элементов

$$C=\{c=(c_1^{\lambda_1},\dots,c_{i_{nk}}^{\lambda_{i_{nk}}})\in\overline{C}=\prod_{i=1}^{nk}C_i \mid P_0(c)\wedge\forall_{k=1,\dots N_P}: P_k(c_{i_k}^{\lambda_{i_k}})\}$$

и упорядоченный лексикографически. Другими словами, список C есть подсписок списка $\overline{C}$, выделяемый сложным признаком, состоящим из N_p+1 признака $P_0, P_1, \ldots P_{N_p}$, причем признак P_0 выделяет некоторое отношение и элемент этого отношения входит в список C, если его проекция на i_k-тый список - сомножитель C_{i_k} удовлетворяет признаку P_k для каждого $k=1, \ldots N_p$.

Исходная информация представляется в следующем виде:

формы 10.1. и 10.2., совпадающие с формами 3.1. и 3.2. (или 1.2.) (в форме 10.1. под номером N_k+1 стоит название списка C - обобщенного сечения, а ниже описание признака P_0).

Форма 10.3.

____

(шифр комплекта)

№№ пп	Номер списка i_k	Название признака P_k	Описание признака P_k
1			
. . .			
N_p			

Выходная информация выдается по форме 10.4., которая имеет вид формы 1.3. (в шапке стоит название списка C).

Задача 11. Проекция обобщенного сечения.

Дана та же информация, что и в задаче 10 и, кроме того, последовательность номеров $j_1, \ldots, j_n$. Требуется составить список $\overline{C}$ - проекцию обобщенного сечения C на

38-9
т.3, рм.10

произведение сомножителей C_{jk} $(k=1,\dots,n)$ (ср. с задачей 9).

Исходная информация представляется в виде:

Форма II.I.

____
(шифр комплекта)

____
(название комплекта)

№№ пп	Название списка	Отметка о проекции (j_k)
I . . . N_k		
N_k+1	(здесь должно стоять название проекции обобщенного сечения $\tilde{C}$)	
	Описание признака P_0	

Замечание. Знаком "+" отмечены строки с номерами j_k

Формы II.2. и II.3. совпадают с формами I.2. и Ю.3. соответственно.

Выходная информация выдается по форме II.4., которая имеет вид формы I.3.

Задача I2. Множество всех подмножеств.

Дан список $C=\{c_i \mid i=1,\dots N_c\}$. Требуется составить комплект всех подсписков данного списка по следующему алгоритму.

Сначала формируются все одноэлементные подсписки. Если подсписки с числом элементов меньше i уже построены, то подсписки с элементами строятся так: к элементу C_1 приписываются в том же порядке все подсписки с $(i-1)$ элементами, не содержащие C_1. Затем то же делается для C_2 и т.д. до C_{N_c} включительно.

Исходная информация представляется в следующем виде:

Форма I2.I. ______________

(шифр списка)

____

(название списка)

№№ п/п	Название элемента списка
I	______________
___	______________
Nc	______________

Выходная информация представляется в следующем виде:

Форма I2.2. (шифр списка)

____

(название списка)

№№ п/п	№№ п/п	№№ п/п	
			подсписки из I элемента
I	I	I	______________
___	___	___	______________
Nc	Nc	I	______________
			подсписки из 2 элементов
Nc+1	I	I	______________

(продолжение формы I2.2.)

№№ п/п	№№ п/п	№№ п/п	подсписки из 2 элементов
Nc+2		2	________
Nc+3	2	I	________
Nc+4		2	________
____	____	____	________
		I	________
(Nc+1)|2	Nc(Nc+1)|2	2	________
________			подсписки из 3 элементов
________			________
________			подсписки из Nc-1 эл-тов
________			________
________			подсписки из N_c эл-тов

6. Согласование диапазонов "выходов-входов"

В данном разделе, примыкающем к блоку выбора методов (т.2, кн.3), указывается способ построения по данной Φ-структуре S Φ-структуры $\sup \mathfrak{M}(S)$, удовлетворяющей следующему условию: для любой дуги $\langle v_1, v_2 \rangle$ графа Φ-структуры $\sup \mathfrak{M}(S)$ диапазон изменения выходных переменных Φ-отношения, сопоставленного вершине v_1, принадлежит диапазону изменения входных переменных Φ-отношения, сопоставленного вершине v_2. Кроме того, конструируемая Φ-структура в определенном смысле максимальна.

Изложение служит математической постановкой задачи для разработки алгоритмов и программ.

Пусть $S = \langle\langle V, \Gamma \rangle, p, \lambda, F \rangle$ – Φ-структура, где $\langle V, \Gamma \rangle$ - граф без циклов и петель. Φ-структура $S' = \langle\langle V', \Gamma' \rangle, p', \lambda', F' \rangle$ называется согласованной с Φ-структурой S, если выполнены следующие условия:

а) $V' = V$, $\Gamma' = \Gamma$, $p' = p$, $F' = F$;

в) если $v \in V$ - любая вершина и $\lambda(v) = \langle X, Y, R, m, n \rangle$, $\lambda'(v) = \langle X', Y', R', m', n' \rangle$ –
Φ-отношения, соответствующие вершине v, то:

в 1) $m' = m$, $n' = n$;

в 2) для любого $i \in Z^+_m : X_i = X'_i$;

в 3) для любого $j \in Z^+_n : Y'_j \subset Y_j$;

в 4) $R' \subset R$;

с) если $\langle v_1, v_2 \rangle \in \Gamma'$ - любая дуга, $\lambda'(v_1) = \langle X', Y', R', m_1, n_1 \rangle$, $\lambda'(v_2) = \langle X'', Y'', R'', m_2, n_2 \rangle$ – Φ-отношения, соответствующие вершинам v_1, v_2 и $f' = F'(v_1, v_2) : Z^+_{n_1} \to Z^+_{m_2}$ – частичная инъекция с областью определения $\mathcal{D}(f')$, то для любого $j \in \mathcal{D}(f') : Y'_j \subset X''_{f'(j)}$.

Множество всех Φ-структур, согласованных с S обозначим через $\mathfrak{M}(S)$. Очевидно, $\mathfrak{M}(S) \neq \emptyset$, так как Φ-структура $\langle\langle V, \Gamma \rangle, p, \lambda', F \rangle$, где для любой $v \in V$:
$\lambda'(v) = \langle X, \emptyset, \emptyset, m, n \rangle$
удовлетворяет условиям а), в), с). На множестве $\mathfrak{M}(S)$

38-9
т.8, кн.10

можно ввести частичный порядок следующим образом:

$$\langle\langle V,\Gamma\rangle,\rho,\lambda',F\rangle = S' \leq S'' = \langle\langle V,\Gamma\rangle,\rho,\lambda'',F\rangle,$$

тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если $v \in V$ любая вершина и $\lambda'(v) = \langle X,Y';R',m,n\rangle$, $\lambda''(v) = \langle X,Y'',R'',m,n\rangle$ – Ф-отношения, соответствующие v, то для любого $j: Y'_j \subset Y''_j, R' \subset R''$.

Очевидно, относительно этого порядка существует единственный максимальный элемент $\sup \mathfrak{M}(S)$.

Пусть $S = \langle\langle V,\Gamma\rangle,\rho,$ – Ф-структура, где граф $\langle V,\Gamma\rangle$ без циклов и петель. Определим для любой дуги $\langle v_1,v_2\rangle \in \Gamma$ Ф-структуру $\gamma(\langle v_1,v_2\rangle,S)$. Пусть $\lambda(v_1) = \langle X,Y,R,m_1,n_1\rangle$, $\lambda(v_2) = \langle X',Y',R',m_2,n_2\rangle$ – Ф-отношения, соответствующие вершинам v_1 и v_2,

$$f = F(v_1,v_2): Z^+_{n_1} \to Z^+_{m_2} -$$

частичная инъекция с областью определения $\mathcal{D}(f)$. Определим Ф-отношение $\langle X,Y'',R'',m_1,n_1\rangle$ следующим образом: для любого $i \in Z^+_{n_1}$:

$$Y''_i = \begin{cases} Y_i, \text{ если } i \bar{\in} \mathcal{D}(f); \\ Y_i \cap X'_{f(i)}, \text{ если } i \in \mathcal{D}(f) \end{cases}$$

и $R'' = R \cap (X \times Y'')$. Положим

$\gamma(\langle v_1,v_2\rangle,S) = \langle\langle V,\Gamma\rangle,\rho,\gamma(\lambda),F\rangle$, где для любой $v \in V$:

$$\gamma(\lambda)(v) = \begin{cases} \lambda(v) \text{ при } v \neq v_1; \\ \langle X,Y'',R'',m_1,n_1\rangle \text{ при } v = v_1. \end{cases}$$

Определим для любого $r \geq 0$ множества $E_r \subset V$ следующим образом:

$E_r = \{v \in V \mid$ длина путей из вершины v в конечные вершины $\leq r$ и существует путь длины $r\}$.

Таким образом E_0 есть множество конечных вершин. Для $r > 0$ положим $\mathcal{Y}_r = \{\langle v,v'\rangle \in \Gamma \mid v \in E_r\}$.

38-9
9.1.xx.10

Пусть $\alpha : \Gamma \to \mathbb{Z}^{+}_{card\,\Gamma}$ — биекция (нумерация дуг), удовлетворяющая следующему условию: для любых i, j таких, что $y_i \neq \emptyset$ и $y_j \neq \emptyset$ и $i < j$:

$$(n \in Im(\alpha|_{y_i}) \wedge m \in Im(\alpha|_{y_j})) \Rightarrow n < m.$$

Определим по индукции Ф-структуры S_r для $r = 1, \ldots, card\,\Gamma$:

1. $S_1 = \gamma(\alpha^{-1}(1), S)$;

2. если для всех $i \leq r-1$ S_i определены, то $S_r = \gamma(\alpha^{-1}(r), S_{r-1})$.

Легко проверяется, что Ф-структура $S_{card\,\Gamma}$, определенная выше по индукции, удовлетворяет условиям а), в), с) и, более того, совпадает с Ф-структурой $S_{card\,\Gamma}$. Таким образом, $S_{card\,\Gamma}$ не зависит от нумерации $\alpha : \Gamma \to \mathbb{Z}^{+}_{card\,\Gamma}$.

7. Композиция функций для бесконечных областей значений переменных

7.1. Вводные замечания

В техническом проекте блока выбора методов (том 2, книга 7) рассматриваются Ф-отношения, задаваемые в явном виде: $R \subset X \times Y$, где R, X, Y - конечные множества, заданные списками. Но возможны и другие способы задания Ф-отношений. В данном разделе Ф-отношения предполагаются заданными в виде нулей функций вида $f: X \times X \to R$ (R - множество действительных чисел) какого-либо класса $\mathfrak{A}(X)$.

В настоящем разделе рассматриваются два класса функций: класс $\mathfrak{A}(M)$ непрерывных функций, где M-компактное метрическое пространство и класс $\mathfrak{A}(R)$ линейных функций от двух действительных переменных. Показывается, что эти два класса функций обладают следующим свойством (замкнутость относительно композиции): для любых двух Ф-отношений, заданных функциями классов $\mathfrak{A}(M)$ или $\mathfrak{A}(R)$ композиция Ф-отношений задается функцией этого класса. Заметим, что, "как правило", классы функций не обладают этим свойством. Напомним, что композиция Ф-отношений является частным случаем свертки Ф-структур. Свойством замкнутости обладает так же класс $\mathfrak{A}(R^n)$ аналитических функций с конечным числом нулей.

Изложение для класса линейных функций играет роль постановки задачи на разработку алгоритмов и программ, реализующих свертку в одном частном случае Ф-структур. Случай же класса непрерывных функций носит скорее теоретический характер. Случай класса аналитических функций, видимо, может быть доведен до уровня постановки задачи, если рассматривать только ряды, задаваемые алгоритмами, в частности формулой общего члена.

В п.3 доказывается замкнутость более широкого класса.

7.2. Замкнутость класса линейных функций

Через R^n будем обозначать n-мерное вещественное пространство ($n \geqslant 1$). Любое частичное отображение $f: R^m \times R^n \to R$ (функция) определяет отношение $X_f \subseteq R^m \times R^n$ следующим образом: $X_f = \{\langle x, y\rangle \mid x \in R^m \wedge y \in R^n \wedge f(x,y) = 0\}$. Пусть $f: R^n \times R^n \to R$, $g: R^n \times R^n \to R$ две функции и X_f, X_g – соответствующие отношения. Композиция $X_g \circ X_f$ определяется следующим образом: $X_g \circ X_f = \{\langle x, z\rangle \mid x \in R^n \wedge z \in R^n \wedge ((\exists y \in R^n)\, f(x,y) = 0 \wedge g(y,z) = 0)\}$.
Класс функций $\mathfrak{A}$ (R^n) называется замкнутым относительно композиции, если выполнено следующее условие: для любых функций $f: R^n \times R^n \to R$, $g: R^n \times R^n \to R$ из $\mathfrak{A}$ (R^n) существует функция $h: R^n \times R^n \to R$ из $\mathfrak{A}(R^n)$ такая, что $X_h = X_g \circ X_f$. Примером такого класса являются линейные функции от двух переменных. Действительно, если

$$f(x,y) = ax + by + c\,, \quad g(y,z) = a'y + b'z + c'$$

определяют отношения X_f и X_g, то функция $h(x,z) = aa'x + bb'z + a'c - bc'$ определяет отношение $X_h = X_g \circ X_f$. В действительности и в более общем случае, когда вместо R рассматривается любое линейное пространство L над R, класс линейных функций от двух аргументов $\mathfrak{A}$ (L) замкнут относительно композиции.

7.3. Замкнутость класса C^∞ (R^n)

Пусть $\mathfrak{A}$ (R^n) – класс функций, имеющих все частные производные всех порядков. Кроме того, предполагается, что все функции этого класса имеют конечное число нулей. Пусть $f, g \in \mathfrak{A}(R^n)$ и $X_g \circ X_f = \{\langle x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}\rangle \in R^n \times R^n \mid i \in Z_k^+\}$ – композиция ($Z_k^+ = \{1, \dots, k\}$). Положим

$$h = \prod_{i=1}^{k} \left((x_1 - x_1^{(i)})^2 + \ldots + (x_n - x_n^{(i)})^2 + (z_1 - z_1^{(i)})^2 + \ldots + (z_n - z_n^{(i)})^2\right).$$

Тогда, очевидно, $X_h = X_g \circ X_f$. Кроме того, ясно, что $h \in \mathfrak{A}(R^n)$, следовательно класс $\mathfrak{A}$ (R^n) замкнут относительно композиции.

7.4. Замкнутость класса непрерывных функций

Пусть M - метрическое пространство с метрикой ρ и R — множество действительных чисел.
Любое отображение $f: M \times M \to R$ (функция) определяет отношение $X_f \subset M \times M$ следующим образом: $X_f = \{\langle x,y\rangle \mid x \in M \wedge y \in M \wedge f(x,y) = 0\}$. Пусть $f: M \times M \to R$, $g: M \times M \to R$ две функции и X_f, X_g, соответствующие отношения. Композиция $X_g \circ X_f$ определяется следующим образом:
$X_g \circ X_f = \{\langle x,z\rangle \mid x \in M \wedge z \in M \wedge ((\exists y \in M)\, f(x,y) = 0 \wedge g(y,z) = 0)\}$. Класс функций $\mathfrak{A}$ (M) называется замкнутым относительно композиции, если выполнено следующее условие: для любых функций $f: M \times M \to R$, $g: M \times M \to R$ из $\mathfrak{A}$ (M) существует функция $h: M \times M \to R$ из $\mathfrak{A}$ (M) такая, что $X_h = X_g \circ X_f$. Метрика на множестве $M \times M$ определяется следующим образом: $r(\langle x,y\rangle, \langle z,t\rangle) = \sqrt{\rho^2(x,z) + \rho^2(y,t)}$.

Пусть M компактное метрическое пространство, тогда известно, что $M \times M$ также является компактным метрическим пространством. Пусть $\mathfrak{A}$ (M) класс непрерывных функций на M×M и $f, g \in \mathfrak{A}(M)$ две функции этого класса. Докажем, что множество $F = X_g \circ X_f$ замкнуто.

Пусть $\langle a, b\rangle$ предельная точка множества F и $\langle x_1, z_1\rangle, \langle x_2, z_2\rangle, \dots, \langle x_n, z_n\rangle, \dots$ последовательность точек из F, сходящаяся к $\langle a, b\rangle$.
По определению множества F, этой последовательности можно сопоставить последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ точек из M такую, что для любого $i \geq 1$ $f(x_i, y_i) = 0$ и $g(y_i, z_i) = 0$.

Ввиду компактности пространства M, из последовательности $y_1, \dots, y_n, \dots$ можно выделить подпоследовательность $y_{n_1}, \dots, y_{n_k}, \dots$, сходящуюся к некоторой точке y. Тогда последовательности $\langle x_{n_1}, y_{n_1}\rangle, \dots, \langle x_{n_k}, y_{n_k}\rangle, \dots$ и

$\langle y_{n_2}, z_{n_2}\rangle, \ldots, \langle y_{n_k}, z_{n_k}\rangle, \ldots$ сходятся к точкам $\langle a, y\rangle$ и $\langle y, b\rangle$ соответственно.

Из непрерывности функций f и g следует, что

$$f(a,y) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$$

и

$$g(y,b) = \lim_{k\to\infty} g(y_{n_k}, z_{n_k}) = 0 .$$

Таким образом, точка $\langle a, b\rangle$ принадлежит множеству F, следовательно F замкнуто. Известно, что функция $h(x,y) = \inf_{\langle t,z\rangle\in F}(r(\langle x,y\rangle, \langle t,z\rangle))$ непрерывна. Так как множество F замкнуто, то функция $h(x,y)$ равна нулю на множестве F и положительна в остальных точках пространства М х М. Следовательно, $\chi_h = \chi_g \circ \chi_f$ и класс функций $\mathfrak{A}$ (М) замкнут относительно композиции.