МИНИСТЕРСТВО ЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ СССР

Главное производственно-техническое управление по строительству

Всесоюзный институт по проектированию организации энергетического строительства "ОРГЭНЕРГОСТРОЙ"

Тема № 4631

План 1973 - 1974гг.

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ АСУ

Раздел А.

Применение методов машинного проектирования АСУ

К Н И Г А 4

Теоретические и математические разработки по проблеме машинного проектирования систем управления.

Часть 1. Математическое описание объекта и процесса строительства для автоматизации проектирования технологии строительства.

Часть 2. О выборе языка для формального описания проектов систем организационного управления.

Часть 3. Регулярные морфизмы родов структур и связанные с ними категории.

Зам.директора института начальник СКБ АСУ /В.А.Сердюков/

Начальник отдела НИС-7 /О.М.Дукарский/

Начальник отдела АСУ-27 /Т.С.Монахова/

Руководитель темы главный специалист /С.П.Никаноров/

М о с к в а - 1 9 7 4 г.

В настоящей книге представлены теоретические и математические разработки по проблеме машинного проектирования АСУ, выполненные по теме 4631 в 1973 - 1974гг.:

- часть 1 "Математическое описание объекта и процесса строительства для автоматизации проектирования технологии строительства
- часть 2 "О выборе языка для формального описания проектов систем организационного управления",
- часть 3 "Регулярные морфизмы родов структур и связанные с ними категории".

Исполнители работы: отделы НИС-7, АСУ-27, АСУ-21.

Руководитель темы: главный специалист С.П.Никаноров.

Отчет разработали:

часть 1: старший научный сотрудник к.ф.м.н. Д.Б.Персиц, инж. Е.В.Савелов, главный специалист С.Э.Беккер,

часть 2: главный специалист к.ф.н. Ю.А.Гастев,

часть 3: старший научный сотрудник к.ф.м.н. Д.Б.Персиц, инж. Е.В.Савелов.

А Н Н О Т А Ц И Я
К Ч А С Т И 1

Математическое описание объектов и процессов строительства, представленное в этой части, содержит определения понятий "каркаса" как множеств тел и мест, на которых введен ряд отношений: быть размещенным в, место принадлежит месту, место является границей места, быть соединенными, удерживать, а также определение понятия строительства как сборки каркаса. Описаниям придана аксиоматическая форма, чтобы обеспечить использование в процессе автоматизированного проектирования систем организационного управления.

А Н Н О Т А Ц И Я
К ЧАСТИ 2

Хотя принятое в теме 4631 описание используемых понятий с помощью теории структур Н.Бурбаки обеспечивает сквозную автоматизацию процесса проектирования систем организационного управления от определений до проектов, представляется целесообразным изучение возможностей использования других средств описания для решения той же самой задачи. В части 2 рассматриваются некоторые общие требования к используемым для описания языкам и выдвигается предположение о возможности использования для этих целей языка расширенного исчисления предикатов /многосортных и высших порядков/

А Н Н О Т А Ц И Я
К ЧАСТИ 3

Работа посвящена определению понятия регулярного морфизма и построению связанных с этим понятием категорий классических родов структур. Результаты работы использованы в "Задании на разработку комплекса алгоритмов и программ логической части автоматизированной системы проектирования систем организационного управления" (раздел I) при определении понятия "операция сборки" и предполагают быть использованными в других вопросах при применении метода автоматизированного проектирования; при построении базового рода структуры "Аспектирование" и при построении компонент родовой структуры. Понятие регулярного морфизма является частным случаем понятия вывода структур, введенного Н.Бурбаки.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Часть 1

Математическое описание объекта и процесса строительства для автоматизации проектирования технологии строительства

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных составных частей метода автоматизированного проектирования является набор базовых теоретико-множественных моделей. В настоящей работе представлены модели (или определения) объекта строительства (точнее, его конструктивного аспекта) и процесса строительства (то же, его технологического аспекта). Метод автоматизированного проектирования требует представления моделей в терминах родов структур во вполне определенном виде. Тем не менее, в настоящей работе модели изложены на обычном математическом языке, лишь с небольшой ориентацией на последующее представление в указанном виде. Причина заключается в том, что, с одной стороны, при разработке подобных моделей, изложение удобнее вести на обычном языке, а с другой - использование в рамках метода требует сервисных средств, предусмотренных работой метода, но еще не разработанных. Кроме того, при апробировании отдельных элементов метода (таких, как определение содержания проекта) вполне можно пользоваться моделями, представленными в настоящей работе.

Изложение в работе ведется таким образом, чтобы логическая строгость была совмещена с доступностью для чтения и с компактностью текста. С этой целью каждая формула снабжается ее интерпретацией, и для не вполне очевидных для нематематика теорем даны достаточно подробные доказательства. Заметим, что упомянутая выше форма представления моделей, предусмотренная работой метода, не предполагает (и даже не допускает) включения в текст доказательств теорем.

Таким образом, изложение моделей ориентировано на широкий круг специалистов по проектированию систем организационного управления, но предполагают знакомство с основными принципами метода автоматизированного проектирования, с которыми можно ознакомиться по материалам настоящей темы.

I. Определение каркаса.

Под каркасом мы понимаем некоторое множество материальных тел (конструкций) K и некоторое множество мест M вместе с определяемым ниже набором отношений на этих множествах. Эти отношения задают описание каркаса и некоторых его свойств, а также позволяют дать определение процесса строительства, т.е. технологии. Мы предполагаем, что множества K и M конечны и число элементов множества K больше единицы. Переходим теперь к определению отношений на множествах K и M.

I. Отношение $J \subset K \times M$.

(материальное тело занимает некоторое место в пространстве)

Аксиома:

$$(A.J.1)\quad \forall \alpha \in K : (\exists m \in M : (\alpha, m) \in J)$$

(любая конструкция $\alpha \in K$ занимает некоторое место $m \in M$).

$$(A.J.2)\quad (\alpha, m) \in J \wedge (\alpha', m) \in J \Longrightarrow \alpha = \alpha'$$

(в одном месте не может находиться более одной конструкции).

$$(A.J.3)\quad (\alpha, m) \in J \wedge (\alpha, m') \in J \Rightarrow m = m'$$

(одна конструкция не может находиться более, чем в одном месте).

Отношение J определяет инъекцию $\gamma : K \to M$ следующим образом: для любого $\alpha \in K$ положим: $\gamma(\alpha) = m$, где m – единственное место из M такое, что $(\alpha, m) \in J$

2. Отношение $R_v \subset M \times M$

(про некоторые пары мест $(m, m') \in M \times M$ сказано, что место m принадлежит месту m').

Аксиомы:

$$(A.R_v.1)\quad \forall m \in M : (m, m) \in R_v$$

(любое место принадлежит самому себе).

$$(A.R_v.2)\quad (m, m') \in R_v \wedge (m', m) \in R_v \Longrightarrow m = m'.$$

(если первое место принадлежит второму, а второе место - первому, то эти места совпадают).

$(A.R_v.3)$ $(m, m') \in R_v \wedge (m', m'') \in R_v \Rightarrow (m, m'') \in R_v$.

(если место m принадлежит месту m', а место m' принадлежит месту m'', то m принадлежит m'').

<u>Примечание.</u> Аксиомы означают, что R_v - отношение частичного порядка.

<u>3. Отношение $R_g \subset M \times M$</u>

(про некоторые пары мест $(m, m') \in M \times M$ сказано, что место m является границей места m').

<u>Аксиомы:</u>

$(A.R_g.1)$ $\forall m \in M : (m, m) \bar{\in} R_g$

(никакое место m не может быть границей самого себя).

$(A.R_g.2)$ $(m, m') \in R_g \wedge (m', m'') \in R_g \Rightarrow (m, m'') \in R_g$

(если место m является границей места m', а место m' является границей места m'', то m является границей места m'')

<u>Примечание.</u> Аксиомы означают, что R_g - отношение строго частичного порядка.

Для любого места $m \in M$ положим:

$Gr(m) = \{m' \in M \mid (m', m) \in R_g\}$ - множество всех границ места m.

<u>4. Отношение $R_w \subset M \times M$</u>

Это отношение описывает взаимное расположение мест по высоте.

Аксиомы:

$(A.R_w.1)$ $\forall m \in M : (m, m) \bar{\in} R_v$

(место не может быть выше самого себя).

(если место m' выше места m, а место m'' выше места m', то m'' выше места m).

Примечание. Аксиомы означают, что R_w - отношение строгого частичного порядка.

Т е о р е м а I.

Пусть M' - любое непустое подмножество множества M, тогда существует хотя бы одно место $m_0 \in M'$ такое, что для любого $m' \in M' : (m', m_0) \overline{\in} R_w$.

(любое множество мест содержит место, находящееся ниже всех остальных мест этого множества).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что для любого $m \in M'$ существует $m' \in M$ такое, что $(m', m) \in R_w$.

Тогда, очевидно, существует бесконечная последовательность $(m_1, m_0), (m_2, m_1), \ldots, (m_n, m_{n-1})$, все члены которой принадлежат R_w. Докажем, что все места из последовательности $m_0, m_1, \ldots, m_n$ попарно различны. Пусть $m_i = m_{i+j}$ где $i \geq 0, j > 1$, тогда имеем последовательность $(m_{i+1}, m_i), \ldots, (m_{i+j}, m_i)$, принадлежащую R_w. Из аксиомы $(A.R_w.2)$ следует, что $(m_{i+j}, m_i) \in R_w$, но это противоречит аксиоме $(A.R_w.1)$. Следовательно $m_i \neq m_{i+j}$ для любых $i \geq 0, j > 1$, а это, в свою очередь, противоречит конечности множества M'. Поэтому предположение неверно и теорема доказана.

Положим $\varepsilon(M') = \{m \in M' \mid \forall m' \in M' : (m', m) \overline{\in} R_w\}$.

Как было доказано выше, $\varepsilon(M') \neq \phi$

Аксиомы, связывающие отношения J, R_v, R_g, R_w.

(A.1) $(m', m) \in R_g \Longrightarrow (m', m) \overline{\in} R_v$

(граница данного места не принадлежит данному месту).

$$(A.2)\ (\alpha, m) \in J \Rightarrow \forall m' \in Gr(m)\ \forall \alpha' \in K : (\alpha', m') \bar{\in} J$$

(если некоторая конструкция $\alpha \in K$ принадлежит месту $m \in M$, то некая другая конструкция α' из множества K не может принадлежать границе m' места m).

$$(A.3)\ (\alpha, m) \in J \wedge (m', m) \in R_v \Rightarrow m' = m.$$

(если место m занято конструкцией α, то никакое другое место не может принадлежать месту m).

$$(A.4)\ \forall \alpha \in K\ \exists \alpha' \in K : Gr(\gamma(\alpha)) \cap Gr(\gamma(\alpha')) \neq \emptyset \wedge$$
$$\wedge ((\gamma(\alpha'), \gamma(\alpha)) \in R_w \vee (\gamma(\alpha), \gamma(\alpha')) \in R_w)$$

(для любой конструкции $\alpha \in K$ существует конструкция $\alpha' \in K$ такая, что места, в которых находятся конструкции α и α' имеют хотя бы одну общую границу и, кроме того, одно из этих мест выше другого).

5. Отношение $R_s \subset K \times K$

Множеству R_s принадлежат те и только те пары $(\alpha, \alpha') \in K \times K$ конструкций, которые соединены друг с другом. Это отношение определяется через описанные выше отношения следующим образом:

$$(A.R_s.1)\ (\alpha, \alpha') \in R_s \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha' \wedge Gr(\gamma(\alpha)) \cap Gr(\gamma(\alpha')) \neq \emptyset$$

Очевидно отношение R_s обладает следующими свойствами:

$$(T.R_s.1)\ \forall \alpha \in K : (\alpha, \alpha) \bar{\in} R_s$$

(конструкция не соединена сама с собой).

$$(T.R_s.2)\ (\alpha, \alpha') \in R_s \Rightarrow (\alpha', \alpha) \in R_s$$

(если конструкция α соединена с конструкцией α', то α' соединена с конструкцией α).

Кроме того, из (A.4) следует:

(T.R_s.3) $\forall \alpha \in K \ \exists \alpha' \in K : (\alpha, \alpha') \in R_s$

(для любой конструкции α существует конструкция α', с которой она соединена).

6. Отношение $R_y \subset K \times K$ (отношение опорности).

Множеству R_y принадлежат те и только те пары $(\alpha, \alpha') \in K \times K$, для которых конструкция α удерживает конструкцию α'. Это отношение определяется через описанные выше отношения следующим образом:

$$(A.R_y.1)\ (\alpha, \alpha') \in R_y \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : n \geq 2, \alpha_1 = \alpha, \alpha_n = \alpha' \wedge$$
$$\wedge \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : ((\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in R_s \wedge (\gamma(\alpha_i), \gamma(\alpha_{i+1})) \in R_w)$$

(конструкция α удерживает конструкцию α' тогда и только тогда, когда существует последовательность конструкций, соединяющая α с α' такая, что место каждой следующей конструкции этой последовательности расположено выше места предыдущей).

Из аксиом (A.R_w.1) и (A.R_w.2) вытекает следующее свойство:

(T.R_y.1) $\forall \alpha \in K : (\alpha, \alpha) \bar{\in} R_y$

(конструкция не удерживает сама себя).

Из (A.4) следует:

$$(T.R_y.2)\ \forall \alpha \in K \ \exists \alpha' \in K : (\alpha, \alpha') \in R_s \wedge$$
$$\wedge ((\alpha, \alpha') \in R_y \vee (\alpha', \alpha) \in R_y)$$

(любая конструкция либо непосредственно удерживает некоторую другую конструкцию, либо удерживается другой конструкцией).

Из (A.R_y.1) следует:

(T.R_y.3) $(\alpha, \alpha') \in R_y \wedge (\alpha', \alpha'') \in R_y \Rightarrow (\alpha, \alpha'') \in R_y$

(если конструкция α удерживает конструкцию α' и конструкция α' удерживает конструкцию α'', то конструкция α удерживает конструкцию α'').

Т е о р е м а 2.

Пусть K' - любое подмножество множества K , тогда существует хотя бы одна конструкция $\alpha_0 \in K$ такая, что $(\alpha', \alpha_0) \bar{\in} R_y$ для любой $\alpha' \in K'$ (любое множество конструкций содержит хотя бы одну конструкцию, которая не удерживается ни одной другой конструкцией этого множества).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы I.

Положим $e(K') = \{\alpha \in K' \mid \forall \alpha' \in K' : (\alpha', \alpha) \bar{\in} R_y\}$.

Множество $e(K)$ интерпретируется как множество конструкций, находящихся на земле.

2. Определение процесса строительства.

Технологией называется множество $T \subset 2^K$, т.е. некоторое множество подмножеств множества конструкций К, удовлетворяющее следующим условиям: (А.Т.1) $\phi \in T \wedge K \in T$

(пустое множество принадлежит Т, Множество К принадлежит Т);

(А.Т.2) $\forall X, Y \in T : X \subset Y \vee Y \subset X$

(если X и Y любые два множества из Т, то либо X содержится в Y либо Y содержится в X).

Прежде чем вводить остальные аксиомы докажем некоторые утверждения.

Т е о р е м а 3.

Пусть T' - любое непустое подмножество из T, тогда существует единственное множество $\inf T' \in T'$ и единственное множество $\sup T' \in T'$ такие, что для любого $X \in T'$:

$\inf T' \subset X \subset \sup T'$.

Доказательство.

Докажем это индукцией по числу элементов множества T'. Если $card(T')=1$, то утверждение очевидно. Пусть для всех множеств T' с числом элементов $card(T') \leq n$ утверждение доказано. Пусть T' таково, что $card(T')=n+1$, тогда $T'=T'' \cup \{X\}$, где $card(T'')=n$, а $X \in T'$. По предположению индукции множества $\inf T''$ и $\sup T''$, удовлетворяющие требуемым свойствам, существуют. Из аксиомы (А.Т.2) следует, что либо $X \subset \inf T''$, либо $\inf T'' \subset X$. Очевидно в первом случае $\inf T' = X$, во втором $\inf T' = \inf T''$.

Аналогично доказывается существование множества $\sup T'$.

Теорема доказана.

Пусть $X \in T$ и $X \neq \phi$, положим $\underline{X} = \sup\{Y \in T \mid Y \subset X \land Y \neq X\}$. Пусть $X \neq K$, положим $\overline{X} = \inf\{Y \in T \mid X \subset Y \land X \neq Y\}$. Очевидно, $\underline{X} \subset X$, $\underline{X} \neq X$ и $X \subset \overline{X}$, $X \neq \overline{X}$.

Лемма

Пусть $X \in T$, $X \neq K$ и $Z \in T$ таково, что $X \subset Z \subset \overline{X}$, тогда либо $Z = X$, либо $Z = \overline{X}$.

Доказательство. Пусть $Z \neq X$, тогда имеем: $Z \in T$, $X \subset Z$ и $X \neq Z$, следовательно $Z \in \{Y \in T \mid X \subset Y \land X \neq Y\}$, поэтому $\overline{X} \subset Z$, откуда $Z = \overline{X}$. Лемма доказана.

Определим теперь понятие технологической последовательности

(для данной технологии):

1. положим $X_0 = \phi \in T$;

2. если $i \in N$ (N - множество натуральных чисел) и $X_i \neq K$, то положим $X_i = \overline{X}_{i-1}$.

Заметим, что существует $n \in N$ такое, что $X_n = K$, так как в противном случае мы получим бесконечную последовательность $X_0 \subset X_1 \subset, \ldots, \subset X_i \subset, \ldots$ попарно различных множеств, принадлежащих T , но это противоречит конечности множества T . Полученная конечная последовательность $\phi = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = K$ называется технологической последовательностью.

Покажем, что $T = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$.

Пусть $X \in T$ и $X \neq K$, положим $i = max(\{j \in N \cup \{0\} \mid X_j \subset X\})$, тогда $X_{i+1} \not\subset X$. Из (A.T.2) следует, что $X \subset X_{i+1}$. Поэтому мы имеем $X_i \subset X \subset X_{i+1} = \overline{X}_i$. Применяя доказанную выше лемму получаем, что $X = X_i$, следовательно

$$T = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$$

Для любого $X \in T$ положим $t(X) = max(\{j \in N \cup \{0\} \mid X_j \subset X)$ - номер множества X . Этот номер интерпретируется как некоторый момент времени. Очевидно $t(\overline{X}) = t(X) + 1$, если $X \neq K$ и $t(\underline{X}) = t(X) - 1$, если $X \neq \phi$. Множество $X \setminus \underline{X}$ интерпретируется как множество конструкций, установленных в момент времени $t(X)$, множество X интерпретируется как множество конструкций установленных в промежуток времени от 0 до $t(X)$.

Очевидно, $X = \bigcup_{i=1}^{t(X)} (X_i \setminus \underline{X}_i)$, где множества $X_i \setminus \underline{X}_i$ попарно не пересекаются. ($X_i \setminus \underline{X}_i$) - множество конструкций, установленных в момент времени $t(X_i) = i$).

Введем теперь остальные аксиомы технологии.

$$(A.T.3)\ X \in T \wedge \alpha \in X \setminus \underline{X} \Rightarrow \alpha \in e(K) \vee$$
$$\exists\, \alpha' \in \underline{X} : ((\alpha', \alpha) \in R_y \wedge (\alpha', \alpha) \in R_s)$$

(конструкция, установленная в данный момент времени $t(X)$ либо находится на земле, либо непосредственно удерживается конструкцией, установленной в какой-либо из предыдущих моментов времени, т.е. в промежуток времени от 0 до $t(\underline{X}) = t(X) - 1$;

(A.T.4) $X \in T \wedge \alpha, \alpha' \in X \setminus \underline{X} \Rightarrow (\alpha, \alpha') \bar{\in} R_s$

(две конструкции, соединенные друг с другом не могут быть установлены одновременно);

(A.T.5) $X \in T \wedge \alpha \in X \setminus \underline{X} \wedge \alpha' \in K \wedge (\gamma(\alpha), m) \in R_v \wedge$
$\wedge\, \gamma(\alpha) \neq m \wedge \gamma(\alpha') \in Gr(m) \wedge (\alpha', \alpha) \bar{\in} R_y \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha' \in K \setminus X.$

(все конструкции, окружающие данную конструкцию α, и не удерживающие ее, устанавливаются после установки конструкции α).

Часть 2

О выборе языка для формального описания проектов систем организационного управления

О ВЫБОРЕ ЯЗЫКА ДЛЯ ФОРМАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ ПРОЕКТОВ СИСТЕМ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Настоящая работа посвящена вопросу о выборе языка для описания сложных систем и, тем самым – поиску путей решения задачи формализации (в конечном счете – автоматизации) проектирования систем организационного управления. Предлагаемые ниже соображения могут, как нам представляется, лечь в основу выбора формализованного (быть может – полуформализованного) языка, который, будучи достаточно простым и в различных смыслах "естественным", был бы в то же время пригоден для постановки и решения различных задач, возникающих в связи с общей задачей выработки формальных методов проектирования сложных систем, в первую очередь – систем организационного управления. Таким образом, эти соображения можно рассматривать как частичный ответ на вопросы о выборе языка, поставленные в отчете группы по теме № 4631 за 1973 год (ОМ 156399).

Речь будет идти о выборе некоторых *дополнительных* вариантов концептуальной и лингвистической схемы, в терминах которой можно было бы говорить об интересующих нас сложных системах. Дело в том, что по крайней мере один вариант такой схемы *уже* выбран: это язык, использующий понятие так называемого *обобщенного рода структуры* (являющееся естественным обобщением введенного Н.Бурбаки понятия рода структуры) и описанный в уже упомянутом отчете ОМ 156399. Ниже будут отмечены некоторые черты предложенного языка, дающие основание поставить задачу поиска дополнительных языковых средств.

Основная часть работы как раз и состоит в сопоставлении различных возможных путей решения этой задачи. На этой основе далее будет совсем кратко намечена программа дальнейших работ по рассматриваемой части темы.

Почему искомый язык должен быть формализованным

Безоговорочно положительный ответ на этот вопрос в отчете ОМ 156399 в значительной мере предопределил (наряду с теоретико-множественной традицией классической математики и ее приложений, роли которой мы коснемся несколько ниже) как выбор описанного в этом отчете основного направления работ по автоматизации проектирования на базе "обобщенных родов структур", так и характер возможных его модификаций (в терминах общей теории алгебраических систем, теории категорий и др.). Само по себе это заключение не будет оспариваться и ниже. Но понимание терминов "формализация", "формализованный язык" и т.п. будет при этом, возможно, не по всем пунктам совпадать с традиционным.

Основания, в силу которых язык (или группа языков), предназначенный для описания произвольных сложных систем, должен быть формализованным, неоднократно излагались с различной степенью подробности в общих руководствах по математической логике, теории алгорифмов, математической лингвистике и алгорифмическим языкам. В предыдущих отчетах группы эти основания были детализированы и конкретизированы уже применительно к задаче автоматизации проектирования. Если оставить в стороне многочисленные конкретные требования к языку, вызываемые различными особенностями частных подзадач общей задачи формализации проектирования, то основания эти коротко сводятся к следующему.

Естественные языки и созданные (фактически – возникшие в ходе некоторого "эволюционного" процесса) в их недрах и на их основе языки научных теорий и профессиональные жаргоны оказываются, как раз в силу "естественности", стихийности своего возникновения, весьма хорошо приспособленными для тех общекоммуникативных и конкретно-познавательных, исследовательских функций, к выполнению которых они предназначались и предназначаются теми, кто ими пользуется. Но в силу т е х ж е с а м ы х причин эти языки обладают рядом существенных черт (в околонаучном обиходе зачастую безоговорочно квалифицируемых как недостатки), затрудняющими их использование во все усложняющейся практике современного научно-теоретического и научно-прикладного общения: эти (естественные) языки и жаргоны либо слишком универсальны, чтобы всегда успешно учитывать специфику данной конкретной области своего применения, либо же, напротив, слишком специализированы с учетом этой самой специфики, из-за чего не только оказываются часто недостаточно богатыми и гибкими для обслуживания чуть более широкой сферы, но и н у ж д а ю т с я в п о с т о я н н о й п е р е с т р о й к е, учитывающей непрекращающиеся изменения этой "сферы обслуживания".

Конечно, в обычной языковой практике так на самом деле и происходит: язык и обслуживаемая им внеязыковая сфера представляют перед нами как две части гигантской адаптирующейся системы, находящиеся в каждый момент времени в динамическом равновесии между собой*. Иными словами, "соответствие" между языковыми

---

* То же, вообще говоря, относится и к подсистемам языка и соответствующим ~~ними~~ внеязыковым подсистемам, хотя характер связей между ними далек от тривиального изоморфизма.

конструкциями и их денотатами (значениями), смыслами и, например, переводами на другие языки должно пониматься в достаточной мере фигурально: либо речь идет лишь о более или менее глобальном соответствии (для достаточно больших языковых массивов), или о стохастическом соответствии ("соответствии в среднем"), или о некоем "соответствии в пределе" (выполняемом в каждом конкретном случае с неизбежной, разве лишь оговариваемойпогрешностью), либо о "соответствии" еще в каком-нибудь небуквальном смысле. И для естественных языков такое положение нельзя даже назвать неизбежным злом: отсутствие гарантий в жесткой однозначности соответствия означает тем самым и отсутствие претензий на таковую, благодаря чему фактическое (а не номинальное) соответствием оказывается достижимым несравненно более часто, нежели в случае таких претензий (то есть в случае "урока", "ответить" который можно было бы лишь вызубрив наизусть некоторый вполне определенный и притом достаточно длинный текст).

Но как раз то, что является достоинством для практики живого общения, оказывается непреодолимым препятствием для осуществления проектов автоматизации того же самого общения. В первом случае перестраиваться, адаптируясь друг к другу, могут не только участники конкретного диалога, но и, так сказать, абстрактные участники любого диалога: язык, на котором диалог ведется, и совокупность ситуаций, в той или иной мере "отражаемая" текстами данного языка. В интересующем же нас случае автоматического составления текстов, автоматической их перестройки в зависимости от некоторых внешних воздействий и автоматического исполнения содержащихся в этих воздействиях предписаний одна сторона уж во всяком случае не эволюционирует и в любом смысле является жесткой - это исполнитель-автомат (в частности, речь может идти об ЭВМ). Потому-то и приходится иметь дело с текстами, записанными на некотором языке с четко фиксированными правилами образования и преобразования выражений, составленных из четко заданного первоначального ~~ш~~ алфавита, - а это и значит, по существу, что искомый язык должен быть формализованным.

Говоря еще проще и короче, всякая автоматизация предполагает возможность единообразного выполнения классов однородных операций - то, что математики называют массовыми проблемами. Для этого, в свою очередь, исходная информация должна быть задана в некоторой стандартизованной форме, что фактически равносильно условию формализованности языка.

Выводы из условия формализованности

Чтобы в должной мере оценить смысл и значение этого условия и не пойти по пути "очевидных", но (по нашему мнению) неплодотворных выводов из него, нам придется вернуться к самым истокам понятия "формализованный язык", причем не только в чисто логическом плане, но и в историческом.и И хотя наш анализ будет носить общетеоретический характер, мы постараемся затем извлечь из него вполне конкретные выводы.

Анализ пойдет по двум дихотомическим линиям: формализованный язык - естественный язык, специализированный язык - язык универсального назначения. Первая из этих пар по традиции считается образованной по принципу противоположности, контраста: естественные языки возникают сами по себе, в ходе эволюции рода человеческого, искусственные формализованные языки создаются человеком; в естественных масса стилистических и смысловых оттенков, но зато и двусмысленностей, в искусственных – никаких двусмысленностей, но, конечно, и никаких нюансов; в первых есть омонимия, во вторых – нет; первые для любой цели в равной мере хороши и плохи, вторые – каждый идеален для своей цели, но не более; в естественных языках масса синонимов...

На этом, собственно, все противопоставления и кончаются, поскольку в искусственных формализованных языках также есть синонимия. Наличие синонимов обычно связывается с избыточностью языковых средств, так что ходячее мнение об отсутствии синонимии в "рационально устроенных" формализованных языках вполне объяснимо. Но объяснимо – еще не значит верно. Дело в том, что слово "синоним" обычно (в разговорном обиходе) понимается как синоним лексический, то есть как слово, имеющее тот же смысл*, что некоторое другое слово. И действительно, наличие лексических синонимов воспринимается как признак некоторой неряшливости не только в "совсем искусственных" формализованных языках математической логики, но и, скажем, в полуформализованных научных и профессиональных жаргонах, откуда и идут все разговоры о желательности унификации терминологии и т.п. Но ведь существует еще синонимия морфологическая (например, различные пож написанию суффиксы имеют одно и то же, скажем, уменьшительное значение). Самый же распространенный и важный вид синонимии – это так называемая синтаксическая синонимия: различные выражения имеют одно и то же значение или смысл просто в силу эквивалентности некоторых синтаксических конструкций (игра-

* Или значение; различение этих понятий для дальнейшего изложения несущественно.

ющей роль определяющих соотношений для алгебраических систем и вообще верных равенств и эквивалентностей в математике и логике). Число синтаксических синонимов даже для очень простых фраз исчисляется многими десятками и сотнями, а если не ограничивать длину выражений, то классы синтаксических синонимов вообще бесконечны (это немедленно следует, напрмер, из того, что лингвистический аналог обращения закона снятия двойного отрицания имеет место для любого сколько-нибудь развитого естественного языка). Что же касается языков формализованных, то все эти понятия "склеиваются": если не считать синонимии некоторых конкретных выражений, обусловленной некоторыми конкретными же аксиомами, то любая синонимия обусловлена общими закономерностями данного языка, то есть является в поясненном выше смысле синтаксической (хотя, разумеется, можно при желании различать синонимию термов, синонимию предикатов и синонимию предложений-формул). Можно сказать, что для л ю б о г о языка (естественного или формализованного), на котором определено некоторое отношение эквивалентности предложений, синтаксическая синонимия, реализующая это отношение, играет "универсальную" роль – она фактически связывает произвольный элемент языка хотя бы еще с одним элементом. Языки без синонимии поневоле предписывают единственность способа выражения для любого сообщения (в содержательном смысле этого слова); такие языки в определенном смысле вырождены*. Отдельные фрагменты интересующих нас

---

* Уж на что, казалось бы, прост и не нуждается в синонимах языки знаков уличного движения - а ведь и в нем синонимия не исключение, а, скорее, правило; например, запрет поворота налево эквивалентен разрешению ехать прямо и направо и т.п.

языков могут, конечно, обладать этим свойством вырожденности. Но нас будут здесь интересовать не эти тривиальные в теоретическом отношении* фрагменты, а объемлющие их языковые схемы, заведомо более гибкие и пригодные для синонимических преобразований (в частности - упрощений).

Вообще, если внимательно пересмотреть заново все перечисленные выше контрастные пары, то легко убедиться, что ни одну из них не следует воспринимать абсолютно, безоговорочно. Верно, конечно, что формализованные языки создаются искусственно; но верно и то, что сам процесс их разработки подвержен, в принципе, тем же случайностям, характерным для любого эволюционного процесса, что и формирование и развитие обычного естественного языка. Именно этим обстоятельством, кстати, вызвана необходимость бесконечных модификаций, уточнений и усовершенствований, которым подвергаются такие, например, языки, как АЛГОЛ и другие языки программирования*. Другой пример: омонимии в каждом конкретном описании формализованного языка быть, конечно, не должно - но один и тот же знак может пониматься совершенно по-разному в разных заданиях одного и того же исчисления**.

Оставляя пока до специального рассмотрения последнюю из "контрастных пар" (между специализированными и универсальными языками), мы можем сказать, что формализованные языки, будучи

---

* Трудно представить себе более "чистый" пример формализованного языка, чем язык узкого исчисления предикатов. Между тем, для аккуратной формулировки правил подстановки понадобилось почти пятьдесят лет (от Фреге до Гильберта и Аккермана).

** Типичный пример: знак $\sim$, в одних случаях обозначающий отношение равносильности, в других - операцию эквиваленции, в третьих - отрицание.

з а д у м а н ы как языки, свободные от некоторых свойств естественных языков, в ф а к т и ч е с к о м своем устройстве (а тем более – в развитии) следуют т а к и м ж е закономерностям, что и естественные. Можно даже сказать сильнее: в формализованных языках нет н и ч е г о такого, что – в той или иной мере – не проявилось бы в естественных языках. Так, исчисление высказываний воспроизводит в огрубленной форме способы образования сложных предложений в естественных языках, исчисление предикатов – их субъектно-предикатную структуру и т.д.

Что же касается противопоставления универсальности естественных языков и специализированности искусственных, формализованных, то и оно, при ближайшем рассмотрении, оказывается едва ли не фикцией. С одной стороны, универсальность естественного языка – это, строго говоря, свойство не лексики его, а грамматики: проект технологической или организационной системы и учебник дифференциального исчисления написаны, по существу, на р а з н ы х "русских языках" с очень похожими грамматиками, не более. С другой стороны, специализированность формализованных языков часто значительно преувеличивается. Во всяком случае, наиболее интересный для нас пример – узкое исчисление предикатов (именно "чистое" исчисление, а не какое-либо из прикладных) является поистине универсальной базой для построения всевозможных специальных логических (и логико-математических) языков, то есть играет по отношению к специализированным исчислениям в точности ту же роль, что "универсальный" русский или английский язык по отношению к языкам конкретных научных теорий.

Фактически и в случае естественного языка, и в случае искусственных формализованных языков мы часто сталкиваемся одновременно с обеими тенденциями, затрудняющими использование языка: он может оказаться и слишком универсальным для данного конкретного контекста, и слишком специализированным, "жестким" для различных (хотя в определенных отношениях и близких) контекстов из некоторой области, заранее ограничивающей диапазон контекстов, но не определяющей однозначно никакой конкретный контекст из этого диапазона. Чем стабильнее, однороднее, "консервативнее" описываемые данным языком реальность и система абстракций, тем больше оснований рассчитывать на его адекватность по отношению к этим объектам описания и выражения, причем на адекватность не "устаревающую", устойчивую к потенциальным изменениям языкового универсума, а тем самым – пригодную к любой степени формализации*.

Можно, таким образом, сказать, что необходимость использования существующих и создания новых формализованных языков для решения широкого комплекса различных задач, объединяемых задачами автоматизации, в настоящее время представляется очевидной. Но поиски любых частных решений в этой области должны, по нашему мнению, идти не по линии отыскания или изобретения новшеств, вводимых по чисто формальным соображениям, а на основе ясного и трезвого осознания того обстоятельства, что в с е о с о- [redacted] б е н н о с т и ф о р м а л и з о в а н н ы х я з ы к о в н а у к и (вне зависимости от того, склонны ли мы их расценивать как достоинства, недостатки или как-либо еще) з а л о ж е н ы в е с т е с т в е н н ы х я з ы к а х,

---

* В качестве хорошего примера такого "стабильного подъязыка" в литературе (В.В.Раскин, [redacted] К теории языковых подсистем, М., МГУ, 1971) описан чрезвычайно экономный "язык сводок погоды"; более обширен по лексике, но с еще более экономным и неизменным синтаксисом язык фармакологии (на котором составляются рецепты).

по образу и подобию которых они созданы. И именно этот эвристический тезис* (направленный против традиционного противопоставления естественных и формализованных языков) положен в основу и нашего отношения к уже проделанной работе, и направления наших дальнейших поисков.

Подходы, основанные на принятии или пересмотре теоретико-множественных представлений

Подходы, к рассмотрению которых мы теперь переходим (к ним прежде всего относится уже разработанный по теме № 4631 язык "обобщенных родов структур"), можно коротко и общо охарактеризовать как экстенсиональные. Следуя традиции так называемого теоретико-множественного обоснования и построения математики (Б.Больцано, Г.Кантор, К.Вейерштрасс), произвольные свойства объектов (одноместные предикаты) можно отождествлять с классами объектов, обладающими этими свойствами, а отношения между объектами (многоместные предикаты) – с кортежами (упорядоченными наборами) объектов. Иными словами, теория одноместных предикатов интерпретируется при таком подходе как исчисление классов, да и вся логика предикатов – как исчисление классов кортежей. Возможность такого "сведéния" соотношений между свойствами к обычному теоретико-множественному включению классов (множеств) способна создать ободряющую иллюзию возможности сведéния любых, подчас весьма сложных "качественных" проблем о взаимозависимостях между свойствами к четким, "чисто матема-

---

* О его методологическом родстве с некоторыми направлениями современной теоретической и, особенно, технической кибернетики см. ниже.

тическим" задачам о включении и пересечении классов. Грубо говоря, для математика вопросы типа "сколько?", "как расположены?" и т.п. привычнее (а стало быть, и "яснее") вопросов "что это значит?" и "как это понять?".

Общеизвестно, что относительная простота ж (единая предметная область с одним-единственным определенным на ней первоначальным отношением - отношением принадлежности) и бросающаяся в глаза универсальность теоретико-множественного языка способствовала его проникновению не только почти во все области математики[*], но и в логику (алгебра логики) и даже в лингвистику[**].

Но не менее известно и то, что теоретико-множественная традиция, столь характерная для современной алгебры и теории моделей, наталкивается все же с существенными препятствиями и возражениями, которые можно условно разделить на три группы: I) "формальнологические", 2) "метафизические" и 3) "интуитивные". Первая группа возражений связана с обнаружением парадоксов (противоречий) в "наивной" теории множеств Кантора, в той или иной мере преодолеваемых построением различных систем аксиоматической теории множеств. Роль этих систем в исследованиях по основаниям математики достаточно хорошо известна, так же как и трудные проблемы, встающие в свою очередь в связи с аксиоматическим подходом. Хорошо известны и способы построения на такой основе важнейших разделов классической математики. Что же касается прикладных разработок, то содержательная сторона дела в них обычно настолько превалирует над дедуктивной, что теоретико-множественное (как, впрочем, и логическое) оснащение их чаще всего производит впечатление некоего "украшательства"[***].

[*] За исключением теории алгорифмов и, конечно, всей конструктивной математики.

(сноски [**] и [***] см. на след. стр.)

О работе, описанной в отчете ОМ 156399, этого безусловно не скажешь. Но и ее авторам трудно отделаться от ощущения некоторого излишества, когда достаточно изощренный концептуальный аппарат аксиоматической теории множеств привлекается к описанию столь материальных (и уж конечно конструктивных) объектов, каковыми являются элементы спецификаций реальных проектов, тем более, что никаких д е д у к т и в н ы х задач при формализации проектирования вообще не ставится*, так что никаких аксиом в обычном смысле слова здесь вообще не нужно.

Следует отметить, что это обстоятельство уже сыграло достаточно серьезную роль в выборе концептуального аппарата в отчете ОМ 156399: поскольку в центре внимания работы по формализации проектирования лежат не дедуктивные вопросы, а проблема манипулирования понятиями, употребляемыми при проектировании, операциями над этими понятиями и текстами, в которых встречаются эти понятия и операции, внимание авторов отчета было привлечено не к системам аксиоматической теории множеств как к таковым, а к различным а л г е б р а и ч е с к и м

---

* Последнее замечание, впрочем, отчасти нейтрализуется тем соображением, что любая "автоматизация" так или иначе подразумевает некоторый регулярный процесс "развертывания" искомых текстов, во многом аналогичный процессу дедукции и осуществляемый в рамках некоторого и с ч и с л е н и я.

(сноски ** и *** - к предыдущей странице)

** См., например, работы А.А.Ляпунова, О.С.Кулагиной, И.И.Ревзина и их последователей и учеников.

*** Это относится в полной мере и к упомянутым математико-лингвистическим работам, при всей серьезности последних.

построениям над последними.

Первое, что тут приходит в голову – это обратиться к общей теории алгебраических систем (множеств с определенными на них наборами операций и предикатов). Но, во-первых, у "теории алгебраических систем" в настоящее время действительно "общим" является разве лишь название: все конкретные ее результаты относятся либо к конкретным алгебраическим теориям (прямого отношения к интересующей нас проблематике не имеющим), либо к теории моделей. Вообще, если не считать самого понятия алгебраической системы, говорить сейчас о каком-либо "аппарате" этой "теории" было бы просто несерьезно*. Во-вторых, уже проделанная работа по теме исходила из представления, согласно которому целью искомой теории в значительной мере является манипулирование абстрактными объектами разного уровня абстракции. В-третьих, наконец, ставилась цель не только и не столько описать на аксиоматическом (или любом другом) уровне некоторое исчисление, сколько дать операциональные средства для "развертывания" его экстенсиональных интерпретаций и свободного перестраивания и манипулирования последними.

Все эти соображения и факты делают более чем естественным обращение к теоретико-модельным конструкциям, имеющим в определенном смысле более высокий порядок, чем "элементарное" понятие алгебраической системы, а именно к введенной Н.Бурбаки ветвящейся иерархии "родов структур", а затем и к некоторому ее обобщению.

Поскольку подробному описанию проделанной работы и ее пер-

---

* Напрашивающийся путь – отказ от эпитета "алгебраических", как показывает опыт, делу также не помогает.

спективам дальнейшего ее развития и использования посвящены отчет ОМ 156399 и основная часть настоящего отчета, мы ограничимся здесь лишь двумя замечаниями, никоим образом не претендующими на всестороннюю оценку этой работы: единственная цель их состоит в том, чтобы мотивировать поиски альтернативных подходов.

Первое замечание – теоретического порядка. Метатеоретическая конструкция, лежащая в основе предложенной операциональной схемы, существенно опирается, по нашему мнению, на фактическое о т о ж д е с т в л е н и е понятий т е о р и и, о п р е д е л е н и я и п о н я т и я, что допустимо разве что в качестве развернутой метафоры (иногда выразительной, но почти всегда неточной, как все метафоры). Думается, что более аккуратное использование понятийного аппарата современной логики* могло бы позволить обойтись без "многоэтажных" конструкций, столь характерных для предложенного аппарата "синтеза определений".

Второе замечание носит, напротив, технический характер и как раз относится к только что отмеченной громоздкости теоретических конструкций схемы "обобщенных родов структур". Конечно, если окажется, что громоздкость эта неизбежным образом обусловлена существом задачи, все недовольства по этому поводу будут иметь лишь эмоциональное значение. Но на данной стадии разработок трудно отделаться от желания "облегчить" технику оперирования понятиями и символами, предложенную в ОМ 156399**.

* В частности, быть может, идеи арифметизации синтаксиса; см. ниже о прикладных исчислениях предикатов.

** Тот факт, что используемая в трактате Н.Бурбаки система понятий не пользуется популярностью в отечественных исследованиях по основаниям математики, не имеет, разумеется, никакой доказательной силы; но нам он представляется симптоматичным.

Говоря далее о предложенном в Приложении I к отчету по теме № 4631 за 1973 год анализе предложенного понятийного аппарата средствами теории категорий, констатируем, что там фактически идет об исследовании вопроса о погружаемости одного формального аппарата в другой. При всем интересе проблем такого рода самих по себе, уместнее будет в данном случае оставить их за пределами обсуждения, так как этот вопрос о погружении непосредственного отношения к проблеме формализации проектирования, по-видимому, не имеет*.

Что же касается так называемого "языка тернарного описания" ЯТО-2 (см. Приложение к настоящему отчету), то будет явно уместнее отложить попытки мотивированной оценки его перспективности в каком бы то ни было отношении по крайней мере до явного и четкого его описания.

Требование "естественности" формализованного языка

Перейдем теперь к предложениям, касающимся поиска альтернативного подхода к проблеме автоматизации проектирования. Поскольку предложения эти относятся к будущей работе, они будут предельно краткими.

Основным и по существу единственным тезисом, из которого мы будем исходить, является подготовленный предыдущим изложением тезис о е с т е с т в е н н о с т и желательной альтернативы. Слово "естественный" понимается здесь не в каком-либо метафорическом, а в самом прямом смысле. Во-первых, мы рассчитываем прийти к интересующей нас модификации языка не из соображений о преимуществах или недостатках того или иного языка как

* А сама теория категорий не демонстрирует никаких видимых оснований для специального внимания к ней в рамках нашей темы.

такового, а следуя *естественному пути*: от существующих содержательных методов проектирования к формальным. Во-вторых, мы надеемся, что полученный в результате поисков язык будет обладать (хотя, вероятно, и в "очищенном виде") некоей "естественной организацией", присущей *естественному языку*. В-третьих, мы полагаем, что следование закономерностям (как известным, так и скрытым), заложенным в самом обычном (в данном случае русском) естественном языке, есть самый надежный (хотя и не всегда легкий) способ не уклониться в сторону чисто формальных новшеств.

Для иллюстрации нашей позиции позволим себе упомянуть для сравнения о двух методологических принципах, получивших большую популярность в последние годы. Первый – это в некотором смысле просто предваряющий наши формулировки тезис *бионики* о "подражании природе". Второй принцип – это опять-таки чрезвычайно близкий идейно к нашим установкам тезис так называемого *ситуационного управления*[*] об "имитации" обычного, "человеческого" способа принятия решений в сложных ситуациях.

Структурно-лингвистический анализ текстов

Исходя из сказанного, *начать* мы бы хотели с выборочного анализа *наличных* проектов систем организационного управления, выполненных на самом обычном естественном языке и вполне традиционными методами (разумеется, опыт и здравый смысл проектировщиков мы считаем весьма существенными

---

[*] Предложенного, насколько нам известно, Д.А.Поспеловым и описанного затем более подробно Ю.И.Клыковым.

сторонами традиции*). Для выполнения этой работы группе совершенно необходимо намеченное начиная с 1975 года сотрудничество с группой математической логики и математической лингвистики Калининского государственного университета под руководством А.В.Гладкого**, а также с отделом семиотики ВИНИТИ.

Исчисление предикатов и его обобщения

Следующий этап будущей работы - это уже переход (точнее, перевод) на формализованный язык в собственном смысле слова. В качестве основы такового мы выдвигаем язык л о г и к и п р е д и к а т о в. Прежде всего - самого обычного узкого исчисления предикатов. Это предложение мы отнюдь не считаем априорным ограничением на программу поисков: поскольку уж мы решили следовать эвристическим принципам, заложенным в естественном языке, то методология в некотором смысле определяется однозначно, так как субъектно-предикатная структура естествен-

---

* На этой стадии весьма полезным может оказаться учет имеющихся "полуформализованных" способов проектирования (в качестве примера упомянем язык описания проектов строительных систем, предложенный С.Э.Беккером).

** Из других ученых, чьи работы и консультации мы хотели бы активно использовать уже на этой стадии работы, можно назвать (перечень заведомо не исчерпывающий), например, И.А. Мельчука, К.И.Бабицкого, Е.В.Падучеву, Ю.Д.Апресяна, М.С.Хоштария ного языка в первом приближении как раз и воплощается в языке логики предикатов, так что никаких других альтернатив здесь попросту нет. Не является в этом смысле "альтернативой", кстати, и теория множеств: независимо от каких бы то ни было возможностей взаимного перекодирования (это, в конце концов, дело вкуса и техники), наш подход подчеркнуто и н т е н с и о н а л е н, а не экстенсионален. Нас интересуют именно смысл и содержание текстов, а не разбиения их на классы эквивалентности и т.п., и, например, отношения для нас – это именно содержательные связи между объектами, а не "множества упорядоченных пар" (или, для многоместных отношений, кортежей).

Другое дело, что исчисление предикатов берется именно в качестве о с н о в ы, а не конечного результата. Обобщения и расширения здесь возможны по многим направлениям, и мы не намерены заранее ни от одного из них отказываться. Прежде всего, весьма вероятно, что удобнее будет не фиксировать единую предметную область (хотя и это заранее не исключено), а воспользоваться м н о г о с о р т н о й логикой предикатов. То обстоятельство, что такое расширение, будучи удобным технически, является в то же время несущественным, элиминируемым*, освобождает нас от излишних раздумий по этому поводу. Далее, конечно, возможен переход к тому или иному п р и к л а д н о м у исчислению предикатов. Поскольку, однако, напоминаем, нас интересует расширение не дедуктивных, а выразительных средств языка (первыми, в строгом смысле, мы попросту пока не занимаемся), то правильнее, пожалуй, будет говрить не о расширении самой логики предикатов, а о расширении ее я з ы к а. Такие расширения, приводящие к языкам, промежуточным между ес-

---

* См., например, известную работу Хао Вана 1952 г.

тественным языком и языком логики предикатов, неоднократно описывались*, и весьма вероятно, что некоторые из них (или им подобные), более "естественные", чем язык чистой логики предикатов, будут нам полезны.

Возможен, в принципе, и выход за пределы логики предикатов первого порядка (аналогичный, в известном смысле, переходу от "языка алгебраических систем" к "языку родов структур"). Возможно, впрочем, что и в этом случае сможет сработать техника кодирования**, сводящая (по крайней мере формально) расширенные исчисления предикатов конечных ступеней до исчисления первой ступени.

Открытыми остаются интересные вопросы о целесообразности использования различных систем модальной логики, деонтической логики, логики команд, временной логики и других "неклассических" систем***.

<u>От языка описаний к языку предписаний</u>

Конечная цель нашей программы - это а в т о м а т и з а ц и я проектирования в самом буквальном смысле. Поэтому переход от я з ы к а о п и с а н и й, каковым является любая

---

* Например (и здесь список далеко не полон), в работах Г.С. Цейтина, А.В.Кузнецова, Е.В.Падучевой, Н.М.Ермолаевой, В.К.Финна.

** Описанная в работах Ю.А.Гастева 1959, 1963 и 1972 гг.

*** См. особенно работу А.С.Есенина-Вольпина "О теории модальностей" (в кн. "Логика и методология науки", М., 1967), а также сборник "Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам", М., 1974.

"надстройка" над логикой предикатов, к н языку предписаний, языку команд, упомянутый в предыдущем разделе в качестве гипотетической возможности, на следующем этапе работы оказывается насущной необходимостью. Причем речь должна теперь пойти не о номинальном "обогащении" нашего языка понятием алгорифма или чего-нибудь в этом роде, а о самом буквальном переводе с описательных языков на эффективный алгорфмический язык. Наиболее перспективными для наших целей представляются язык ГАРФ (обобщенная арифметика рекурсивных функций) И.Х.Шмаина и язык РЕФАЛ (алгорифмический язык рекурсивных функций) В.Ф.Турчина. В качестве промежуточного (или предварительного) этапа работы самого пристального внимание заслуживает, по-видимому, информационно-поисковый язык, описанный в последней работе В.К.Финна*. Конечно, во всех этих случаях понадобится тесный творческий контакт с авторами упомянутых языков.

Резюме

Теперь мы можем совсем кратко перечислить последовательные стадии работ, реализующих в перспективе наш альтернативный подход к проблеме автоматизации проектирования организационных систем управления:

1. Изучение традиционных средств проектирования с помощью структурно-лингвистического анализа и их рационализация.

2. Перевод полученных языковых структур на расширенный разумным образом язык многосортной логики предикатов.

3. Перевод на выбранный алгорифмический язык.

4. Трансляция и программирование на ЭВМ.

---

* В сборнике, упомянутом в предыдущем примечании.

Часть 3

Регулярные морфизмы родов структур и связанные с ними категории

В В Е Д Е Н И Е

Настоящая работа является непосредственным продолжением приложения I отчета [2] и посвящена построению более естественного определения понятия "морфизм классических родов структур" и, следовательно, понятия "категория классических родов структур". Такие морфизмы называются здесь регулярными. Понятие регулярного морфизма есть частный случай введенного Н.Бурбаки [I] понятия вывода структуры одного рода из структуры другого. Категория классических родов структур, в которой морфизмами являются способы вывода (также как и категория, введенная в настоящей работе) может быть вложена в полную категорию родов структур. Заметим, что понятие эквивалентности родов структур, введенное Н.Бурбаки, есть частный случай понятия изоморфизма в такой категории. Если расширить понятие эквивалентности родов структур до такого, которое совпадает с понятием изоморфизма, то основное утверждение C ST 7 ([I] , стр.252) останется верным. Более того, именно такие роды структур в математике практически отождествляются, а ни только эквивалентные (ср. там же). Это указывает на плодотворность или, во всяком случае, на целесообразность "категорной" точки зрения. Построенная в настоящей работе категория классических родов структур является, как это уже указывалось, подкатегорией категории, в которой морфизмы - способы вывода структуры одного рода из структуры другого рода. Введенное здесь понятие регулярного мореризма представляется очень важным частным случаем вывода структур. Во всяком случае, в рамках настоящей темы оно уже нашло два приложения: с его помощью определяется понятие "аспектирования" (см."Положение о методе автоматизированного проектирования" в составе настоящей документации по теме 4631), а также понятие компоненты родовой структуры, обобщающей понятие проекции отношения на один из сомножителей (это понятие еще не вошло в официальные документы, но необходимо в работе метода).

1. $\mathcal{Z}$ - графы.

Пусть $G = \langle V, \mathcal{D}\rangle$ - граф, т.е. отношение $\mathcal{D} \subset V \times V$, где V - непустое конечное множество. Для любой вершины $v \in V$ графа G определим множество $\mathcal{D}(v) \subset V$ следующим образом:

$$\mathcal{D}(v) = \{v' \in V \mid (v, v') \in \mathcal{D}\}$$

Множество $\underline{V} = \{v \in V \mid \mathcal{D}(v) = \emptyset\}$ называется множеством конечных вершин графа G.

Пусть $G = \langle V, \mathcal{D}\rangle$ - "дерево", его единственную начальную вершину обозначим через $v_0(G)$. "Дерево" $G = \langle V, \mathcal{D}\rangle$ вместе с отображением $\varphi: V \setminus \{v_0(G)\} \to N$ называется упорядоченным "деревом" и обозначается $\langle G, \varphi\rangle$, если выполнено следующее условие:
для любой вершины $v \in V \setminus \underline{V}$ отображение $\varphi_v = \varphi|_{\mathcal{D}(v)}$ есть биекция множества $\mathcal{D}(v)$ на множество $\{1, \ldots, |\mathcal{D}(v)|\}$, где $|\mathcal{D}(v)|$ - число элементов множества $\mathcal{D}(v)$.

Упорядоченное "дерево" $\langle G, \varphi\rangle$ вместе с отображением $\mu: \underline{V} \to A(\mathcal{Z})$ $(A(\mathcal{Z}) = \{\alpha_i\}_{i=1,2,\ldots})$ называется $\mathcal{Z}$ - графом и обозначается $\langle\langle G, \varphi\rangle, \mu\rangle$. Класс всех $\mathcal{Z}$ - графов обозначим через $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_i$ класс всех $\mathcal{Z}$ - графов, у которых длина максимального пути равна i, $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Множество $\mathfrak{A}_0$ состоит из всех $\mathcal{Z}$- графов с одной вершиной, т.е. для них $V = \{v_0(G)\}$. В этом случае $\mathcal{D} = \emptyset$ и можно считать, что $\varphi = \emptyset$ или, точнее, что $\varphi: \emptyset \to \emptyset$ (отображение φ здесь отождествляется со своим графиком). Очевидно, для любых i, j

$$\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{A}_i$$

2. Операции ∂_n.

Пусть $n \in N$ и $L_1 = \langle\langle G_1, \varphi_1\rangle, \mu_1\rangle, \ldots, L_n = \langle\langle G_n, \varphi_n\rangle, \mu_n\rangle$

– конечная последовательность $\mathcal{L}$ – графов такая, что $V_i \cap V_j = \emptyset$ для любых $i, j \leq n$, $i \neq j$ (для любого $i \leq n$: $G_i = \langle V_i, \mathcal{D}_i \rangle$). Определим теперь операцию ∂_n, сопоставляющую каждому набору $\langle L_1, \ldots, L_n \rangle$ $\mathcal{L}$ – граф $\partial_n(L_1, \ldots, L_n) = \langle\langle G, \varphi \rangle, \mu \rangle$.

Определим сначала "дерево" $G = \langle V, \mathcal{D} \rangle$. Пусть $\{v_0\}$ – множество состоящее из одного элемента v_0 такого, что $v_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Положим $V = \{v_0\} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} V_i)$,

$$\mathcal{D} = \{(v_0, v_0(G_i))\}_{i \in \{1, \ldots, n\}} \cup (\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j).$$

Легко видеть, что полученный таким образом граф является "деревом" с начальной вершиной $v_0(V) = v_0$ и множеством конечных вершин $\underline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \underline{V_i}$, так что семейство $\{\underline{V_i}\}_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ является разбиением множества $\underline{V}$.

Если $v \in V$, то либо $v = v_0$ и тогда $\mathcal{D}(v) = \{v_0(G_i)\}_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ либо $v \in V_j$ для некоторого $j \leq n$ и тогда $\mathcal{D}(v) = \mathcal{D}_j(v)$. Определим теперь отображение φ. Заметим сначала, что для любого "дерева" $\langle V, \mathcal{D} \rangle$ множества $\mathcal{D}(v)$ попарно не пересекаются и что $V \setminus \{v_0(V)\} = \bigcup_{v \in V \setminus \underline{V}} \mathcal{D}(v)$

Поэтому, чтобы задать отображение φ, достаточно задать все биекции φ_v. Пусть теперь $v \in V \setminus \underline{V}$ и $v \neq v_0$, тогда $v \in V_j$ и $\mathcal{D}(v) = \mathcal{D}_j(v)$ для некоторого $j \leq n$ и мы положим $\varphi_v = \varphi_j|_{\mathcal{D}_j(v)}$. Для любой $v_0(G_i) \in \mathcal{D}(v_0)$ положим $\varphi_{v_0}(v_0(G_i)) = i$.

Определим теперь отображение $\mu : \underline{V} \longrightarrow A(\mathcal{D})$. Пусть $v \in \underline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, тогда v принадлежит $\underline{V_j}$ для некоторого $j \leq n$. Положим $\mu(v) = \mu_j(v)$. Этим определено отображение μ, так как множества $\underline{V_i}$ образуют разбиение множества $\underline{V}$. На этом построение $\mathcal{L}$ -графа $\partial_n(L_1, \ldots, L_n)$ закончено. Отметим, что $\mathcal{L}$ – граф определен с точностью до выбора вершины v_0, а следовательно, и с точностью до изоморфизма.

Пусть L - $\mathcal{L}$ - граф с множеством вершин V и $\varepsilon: V \to V'$ - биекция множества V на множество V'. Очевидно, отображение ε единственным образом переносит структуру $\mathcal{L}$ - графа с множества V на множество V' так, что полученный таким образом $\mathcal{L}$ - граф L' изоморфен L. Поэтому для любого набора $\mathcal{L}$ - графов $\langle L_1, \dots, L_n \rangle$, в котором множества вершин для различных $\mathcal{L}$ - графов L_i, L_j могут пересекаться, существует набор $\langle L'_1, \dots, L'_n \rangle$ такой, что L_i изоморфно L'_i для любого $i \leq n$ и $V'_i \cap V'_j = \emptyset$. К этому набору можно применить операцию ∂_n. Таким образом, операция ∂_n "продолжается" на множество всех наборов $\langle L'_1, \dots ; L_n \rangle$ (если, в каждом классе соответствующих наборов $\langle L'_1, \dots ; L'_n \rangle$ зафиксировать один) и $\mathcal{L}$ - граф, полученный в результате, определен с точностью до изоморфизма (для корректности проведенного построения можно условиться считать все рассматриваемые множества вершин принадлежащими одному счетному множеству). Продолжение отображения ∂_n будет также обозначаться через ∂_n.

3. Сопоставление α.

Пусть $\Phi = \Phi(\mathcal{L})$ - множество схем конструкции ступеней, т.е. формул формальной системы $\mathcal{L}$ определенной в [2]. Для любого $n \in N \cup \{0\}$ определим множество $\Phi_n \subset \Phi$ следующим образом:

I $\Phi_0 = A(\mathcal{L})$;

II если все множества Φ_i для $i < n$ $(n \in N)$ определены, то $S \in \Phi$ принадлежит Φ_n тогда и только тогда, когда $S = B(S')$, где $S' \in \Phi_{n-1}$, или $S = P[S_1, \dots S_k]$, где все S_j $(j = 1, \dots k)$ принадлежат Φ_i $(i < n)$, причем существует хотя бы одна

44

формула $S_{j_0} \in \Phi_{n-1} \; (j_0 \leq K)$. Очевидно, что множества Φ_n попарно не пересекаются и что $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n = \Phi$.
Каждой формуле $S \in \Phi$ сопоставим $\mathcal{L}$ - граф $\alpha(S) \in \mathfrak{A}$ так, что если $S \in \Phi_n$, то $\alpha(S) \in \mathfrak{A}_n$, т.е. длина максимального пути $\mathcal{L}$ - графа $\alpha(S)$ будет равна n. Построение будет осуществлено индукцией по n.
Пусть $S \in \Phi_0$, тогда положим $\alpha(S) = \langle\langle V, \mathcal{D}\rangle, \mu\rangle$, где $V = \{v_0\}$ - одноэлементное множество, $\mathcal{D} = \phi$, отображение $\varphi = \phi$. Таким образом, в этом случае $\alpha(S) \in \mathfrak{A}_0$. Предположим, что для любой формулы $S \in \bigcup_{i<n} \Phi_i$, где $n \in N$, сопоставление $S \longmapsto \alpha(S)$ определено, причем, если $S \in \Phi_i$, то $\alpha(S) \in \mathfrak{A}_i$. Пусть $S \in \Phi_n$.
Возможны два случая:

1) $S = B(S')$, где $S' \in \Phi_{n-1}$, положим тогда $\alpha(S) = \partial_1(\alpha(S'))$. Ясно, что $\alpha(S) \in \mathfrak{A}_n$, так как длина максимального пути $\mathcal{L}$ - графа $\alpha(S)$ на единицу больше длины максимального пути $\mathcal{L}$ - графа $\alpha(S')$;

2) $S = P[S_1, \ldots, S_m]$, где $S_j \in \bigcup_{i<n} \Phi_i$ для любого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Положим тогда $\alpha(S) =$

$$= \partial_m(\alpha(S_1), \ldots, \alpha(S_m))$$

В этом случае $\alpha(S) \in \mathfrak{A}_n$, так как существует хотя бы один $\mathcal{L}$ - граф $\alpha(S_{j_0})$, принадлежащий $\mathfrak{A}_{n-1}$. Таким образом, сопоставление $S \longmapsto \alpha(S)$ определено для любой формулы $S \in \Phi$. Заметим, что $\alpha(S)$ определен однозначно с точностью до изоморфизма.

4. Сопоставление β.

Пусть $L = \langle\langle G, \varphi\rangle, \mu\rangle$, где $G = \langle V, \mathcal{D}\rangle$ любой $\mathcal{L}$ - граф. Для любой вершины $v \in V$ определим "дерево" $G^v = \langle V^v, \mathcal{D}^v\rangle$ следующим образом: $V^v = \{v' \in V |$ существует путь с началом в v и с концом в $v' \} \cup \{v\}$,

$$\mathcal{D}^v = \mathcal{D} \cap (V^v \times V^v)$$

Очевидно, что $\langle V^v, \mathcal{D}^v \rangle$ есть "дерево", причем $\underline{V}^v \subset \underline{V}$ и для любой $v' \in V^v$: $\mathcal{D}^v(v') = \mathcal{D}(v')$. Положим

$$\mu^v = \mu \big|_{\underline{V}^v}, \quad \varphi^v = \varphi \big|_{V^v \setminus \{v\}}.$$

Этим мы зададим $\mathcal{X}$ - граф L^v. Если $v \in \underline{V}$, то ясно, что $V^v = \{v\}$, $\mathcal{D} = \phi$, $\varphi = \phi$ и $\mu^v(v) = \mu(v)$.

Сопоставим теперь каждому $\mathcal{X}$ -графу $L \in \mathfrak{A}$ формулу $\beta(L) \in \Phi$ так, что если $L \in \mathfrak{A}_n$, то $\beta(L) \in \Phi_n$. Построение проведем снова как в п. 3 индукцией по n. Пусть $L \in \mathfrak{A}_0$, $L = \langle\langle\{v_0\}, \phi\rangle, \mu\rangle$, положим тогда $\beta(L) = \mu(v_0)$. Предположим, что для любого $L \in \bigcup_{i<n} \mathfrak{A}_i$ $(n \in N)$ сопоставление $L \mapsto \beta(L)$ определено, причем, если $L \in \mathfrak{A}_i$, то $\beta(L) \in \Phi_i$. Пусть $L = \langle\langle G, \varphi\rangle, \mu\rangle \in \mathfrak{A}_n$. $v_0 = v_0(V)$ - начальная вершина, $|\mathcal{D}(v_0)| = k$. Если $1 \leq j \leq k$, то обозначим через v_j вершину $\varphi_{v_0}^{-1}(j)$. По предположению любому $\mathcal{X}$ - графу L^{v_j} сопоставлена формула $\beta(L^{v_j}) = S_j$, так, как $L^{v_j} \in \bigcup_{i<n} \mathfrak{A}_i$. Положим теперь

$$\beta(L) = \begin{cases} B(S_1) & \text{при } k = 1; \\ P[S_1, \ldots, S_k] & \text{при } k > 1 \end{cases}$$

Так как $L \in \mathfrak{A}_n$, то существует j_0 такое, что $L^{v_{j_0}} \in \mathfrak{A}_{n-1}$, поэтому $\beta(L^{v_{j_0}}) = S_{j_0} \in \Phi_{n-1}$. Кроме того, для любого j : $S_j \in \bigcup_{i<n} \Phi_i$. Следовательно $\beta(L) \in \Phi_n$. Тем самым требуемое сопоставление $L \mapsto \beta(L)$ определено для любого $L \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$. Формальная проверка показывает, что для любого $L \in \mathfrak{A}$ $\mathcal{X}$ - граф $\alpha(\beta(L))$ изоморфен $\mathcal{X}$ -графу L и что для любой формулы $S \in \Phi$: $\beta(\alpha(S)) = S$.

5. Операция сокращения δ.

Определим теперь операцию сокращения, которая каждой паре

(L, v) , где $L \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0$, а v - любая вершина $\mathcal{Z}$ - графа L не совпадающая с начальной, сопоставляет некоторый $\mathcal{Z}$ - граф $\delta(L, v)$.

Определим сначала операцию δ для любой пары (L, v) , где $v \in \mathcal{D}(v_0(G))$ ($v_0(G) = v_0$ начальная вершина $\mathcal{Z}$ - графа L) . Пусть $\mathcal{D}(v_0) = \{v_1, \dots, v_k\}$, где $v_j = \varphi^{-1}_{v_0}(j)$.

Рассмотрим случаи:

1. $k = 1$, тогда положим $\delta(L, v_1) = L$.
2. $k = 2$, тогда положим $\delta(L, v_i) = L^{v_j}$, где $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.
3. $k > 2$, тогда положим для любого $m = 1, \dots k$ $\delta(L, v_m) = \partial_{k-1}(L'_1, \dots, L'_{k-1})$, где $L'_i = L^{v_i}$ при $i < m$, $L'_i = L^{v_{i+1}}$ при $i \geq m$ $(i = 1, \dots, k-1)$

Из этого определения следует, что операция δ, определена для любой пары (L, v) , где $L \in \mathfrak{A}_1$!

Дальнейшее построение проведем индукцией по n , где n таково, что $L \in \mathfrak{A}_n$. Предположим, что δ определена для любой пары (L, v) , где $L \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$. Пусть $L \in \mathfrak{A}_{n+1}$ и $v \in \mathcal{D}(v_0)$, тогда, очевидно, существует единственная вершина $v_{j_0} \in \mathcal{D}(v_0)$ такая, что $v \in V^{v_{j_0}}$, где $V^{v_{j_0}}$ множество вершин $\mathcal{Z}$ - графа $L^{v_{j_0}}$. Так как для $(L^{v_{j_0}}, v)$ операция δ определена, то полагая $\delta(L, v) = \partial_k(L^{v_1}, \dots, \delta(L^{v_{j_0}}, v), \dots, L^{v_k})$ ($\delta(L^{v_{j_0}}, v)$ стоит на j_0 -ом месте), получаем определение $\delta(L, v)$ при $L \in \mathfrak{A}_{n+1}$. Как и выше, результат операции определен с точностью до изоморфизма.

6. Подчиненность схем конструкций ступени и индуцированное отображение ступеней.

Отметим следующие свойства операций ∂_n и β :

1. $L \simeq \partial_1(L') \Rightarrow \beta(L) = B[\beta(L')]$;

2. $L \simeq \partial_K(L_1,\dots,L_K),\ K>1 \Rightarrow \beta(L) = P[\beta(L_1),\dots,\beta(L_K)]$;

3. если V - множество вершин $\mathcal{L}$ - графа L и $\mathcal{D}(v_0) = \{v_1,\dots,v_K\}$, где $v_0 = v_0(L)$ начальная вершина, то $L \simeq \partial_K(L^{v_1},\dots,L^{v_K})$.

Для любого $\mathcal{L}$ - графа L обозначим через $V(L)$ - множество его вершин. Пусть $S_1, S_2 \in \Phi^n$. Мы скажем, что формула S_2 подчинена формуле S_1 посредством вершины $v \in V(\alpha(S_1))$, если $\beta(\delta(\alpha(S_1),v)) = S_2$. Этот факт мы будем записывать в виде $S_1 \cdot v \cdot S_2$. Мы будем считать также, что любая формула S подчинена самой себе посредством некоторой фиксированной "вершины" Λ, что будет обозначаться через $S \cdot \Lambda \cdot S$. Мы будем считать, что $\Lambda \overline{\in} \bigcup_{L \in \sigma} V(L)$.

Определим теперь для любой тройки $S \cdot v \cdot S' = \Pi_v$ отображение ступеней $\overline{\Pi}_v : \overline{\mathfrak{G}}(S) \longrightarrow \overline{\mathfrak{G}}(S')$. Если $\Pi_\Lambda = S \cdot \Lambda \cdot S$, то положим $\overline{\Pi}_\Lambda = id_{\overline{\mathfrak{G}}(S)} : \overline{\mathfrak{G}}(S) \longrightarrow \overline{\mathfrak{G}}(S)$ ($\overline{\Pi}_\Lambda$ - тождественное отображение). Пусть $\alpha(S) = L$, $v_0 \in V(L)$ начальная вершина и $\mathcal{D}(v_0) = \{v_1,\dots,v_K\}$. Для любой $v_i \in \mathcal{D}(v_0)$ положим $S_i = \beta(\delta(L, v_i))$. Таким образом S_i подчинена S.

1. Пусть $K = 1$, тогда $\delta(L, v_1) = L$, поэтому $\beta(\delta(L, v_1)) = \beta(L) = S$, следовательно, $S \cdot v_1 \cdot S = \Pi_1$. Положим в том случае $\overline{\Pi}_1 = id_{\overline{\mathfrak{G}}(S)}$.

2. Пусть $K = 2$, тогда $\beta(\delta(L, v_i)) = \beta(L^{v_j})$, где $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Таким образом, $S \cdot v_i \cdot S_i = \Pi_i$. В этом случае $S = P[\beta(L^{v_1}), \beta(L^{v_2})]$, а $\overline{\mathfrak{G}}(S) = \overline{\mathfrak{G}}(\beta(L^{v_1})) \times \overline{\mathfrak{G}}(\beta(L^{v_2}))$. Положим $\overline{\Pi}_i = pr_j : \overline{\mathfrak{G}}(\beta(L^{v_1})) \times \overline{\mathfrak{G}}(\beta(L^{v_2})) \to \overline{\mathfrak{G}}(\beta(L^{v_j}))$ проекция на j -ый сомножитель.

3. $K > 2$. В этом случае $\overline{G}(S) = \prod_{m=1}^{K} \overline{G}(\beta(L^{v_m}))$,

а $\overline{G}(S_i) = \prod_{\substack{1 \le m \le K \\ m \ne i}} \overline{G}(\beta(L^{v_m}))$.

Определим тогда $\overline{\pi}_i$ следующим образом: для любого $(s_1, \dots, s_K) \in \overline{G}(S)$ положим $\overline{\pi}_i(s_1, \dots, s_K) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_K)$. Из этого определения следует, что для всех троек $\pi_v = S \cdot v \cdot S'$, где $S \in \Phi_0 \cup \Phi_1$ отображение $\overline{\pi}_v$ определено. Применяя индукцию предположим теперь, что $S \in \Phi_{n+1}$ и $v \in V(L)$, $v \overline{\in} \mathcal{D}(v_0)$. Рассмотрим два случая:

I. $K = 1$. Тогда из свойств отображений β и ∂_n вытекает, что $S = B[\beta(L^{v_1})]$, $S' = \beta(\delta(L, v)) = B[\beta(\delta(L^{v_1}, v))]$. Так как по предположению индукции для тройки $\beta(L^{v_1}) \cdot v \cdot \beta(\delta(L^{v_1}, v)) = \pi'_v$ отображение $\overline{\pi}'_v$ определено, то положим $\overline{\pi}_v = \mathcal{P}(\overline{\pi}'_v)$, где $\mathcal{P}(\overline{\pi}'_v): 2^{\overline{G}(\beta(L^{v_1}))} \longrightarrow 2^{\overline{G}(\beta(\delta(L^{v_1}, v)))}$ отображение булеанов, индуцированное отображением $\overline{\pi}'_v$.

2. $K > 1$. В этом случае $\overline{G}(S) = \prod_{m=1}^{K} \overline{G}(\beta(L^{v_m}))$, а $\overline{G}(S') = \overline{G}(\beta(L^{v_1})) \times \dots \times \overline{G}(\beta(\delta(L^{v_i}, v))) \times \dots \times \overline{G}(\beta(L^{v_K}))$

Так как для тройки π'_v отображение $\overline{\pi}'_v$ определено, то положим для любого $(s_1, \dots, s_K) \in \overline{G}(S)$: $\overline{\pi}_v(s_1, \dots, s_K) = (s_1, \dots, \overline{\pi}'_v(s_i), \dots, s_K)$. Тем самым отображение $\overline{\pi}_v$ определено для любой тройки $S \cdot v \cdot S' = \pi_v$.

Для любых двух схем конструкций ступени $S, S' \in \Phi^n$ через $M(S, S')$ обозначим множество всех последовательностей $\pi_1 = S_1 \cdot v_1 \cdot S_2, \dots, \pi_{i-1} = S_{i-1} \cdot v_{i-1} \cdot S_i, \dots, \pi_{n-1} = S_{n-1} \cdot v_{n-1} \cdot S_n$ таких, что $S_1 = S$, $S_n = S'$ и для любого $i = 2, \dots n$: $v_{i-1} \in V(\alpha(S_{i-1}))$ или $v_{i-1} = \Lambda$. Очевидно существует отображение ступеней

$$\overline{\pi}_{n-1} \circ \dots \circ \overline{\pi}_1 : \overline{G}(S) \longrightarrow \overline{G}(S')$$

Две последовательности $\pi_1, \dots, \pi_K$; $\pi'_1, \dots, \pi'_m$ из множества

$M(S_1 S')$ называются эквивалентными, если $\overline{\pi}_K \circ \ldots \circ \overline{\pi}_1 = \overline{\pi}'_m \circ \ldots \circ \overline{\pi}'_1$. Множество классов эквивалентности обозначим через $Mor(S, S')$.

Пусть $\omega \in Mor(S, S')$, $\omega' \in Mor(S', S'')$ и последовательность $\pi_1, \ldots, \pi_K$ принадлежит классу ω, последовательность $\pi'_1, \ldots, \pi'_m$ принадлежит классу ω'. Композицией классов ω и ω' называется класс $\omega' \circ \omega \in Mor(S, S'')$, к которому принадлежит последовательность $\pi_1, \ldots, \pi_K, \pi'_1, \ldots, \pi'_m$. Очевидно, это определение корректно. Элементы множества $Mor(S, S')$ называются морфизмами формулы S в формулу S'. Для любой формулы S класс из множества $Mor(S, S)$ к которому принадлежит последовательность $S \Lambda S$, называется тождественным морфизмом S в S и обозначается id_S. Очевидно, множество Φ^n с так определенными морфизмами, образует категорию. Легко проверить, что $|Mor(S, S)| = 1$. Отображение ступеней, индуцированное морфизмом $\omega : S \to S'$, будем обозначать $\overline{\sigma}(\omega)$. Легко видеть, что сопоставления $S \longmapsto \overline{\sigma}(S)$, $\omega \longmapsto \overline{\sigma}(\omega)$ определяют функтор из категории Φ^n в категорию множеств.

7. Категория классических родов структур

Пусть Σ - классический род структуры с основными базисными множествами $X_1, \ldots, X_{n(\Sigma)}$, со схемой конструкции ступени $S = S(\Sigma)$ и с аксиомой $R\{X_1, \ldots, X_{n(\Sigma)}, J\}_\Sigma$. Положим для любого $X \in Ob((\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma)})$: $\overline{\Sigma}(X) = \{ J \in \overline{\sigma}(\Sigma)(S) \mid R\{X_1, \ldots, X_{n(\Sigma)}, J\} \}$ ($\mathcal{E}ns$ - категория множеств). Обозначим через Str совокупность всех классических родов структур Σ, удовлетворяющих следующему условию: существует $X \in Ob((\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma)})$ такой, что $\overline{\Sigma}(X) \neq \emptyset$. Через $B_0(\Sigma)$ обозначим множество базисных множеств, фигурирующих в типизации рода структуры Σ.

Пусть $\Sigma_1, \Sigma_2 \in Str$, $X_1, \dots, X_{n(\Sigma_1)}$ – базисные множества рода структуры Σ_1, $\sigma_1 = \sigma(\Sigma_1)$, $S_1 = S(\Sigma_1)$ и $Y_1, \dots, Y_{n(\Sigma_2)}$ – базисные множества рода структуры Σ_2, $\sigma_2 = \sigma(\Sigma_2)$, $S_2 = S(\Sigma_2)$.

Положим:

$$Hom_{Str}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \begin{cases} \phi, \text{ если } B_0(\Sigma_2) \not\subset B_0(\Sigma_1); \\ \{\omega \in Mor(S_1, (\bar{\sigma}_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2)(S_2)) \mid R(\Sigma_1)\{X_1, \dots \\ \dots, X_{n(\Sigma_1)}, \jmath\} \Rightarrow R(\Sigma_2)\{Y_1, \dots, Y_{n(\Sigma_2)}, \\ , \sigma_1(\omega)(\jmath)\}\}, \text{ если } B_0(\Sigma_2) \subset B_0(\Sigma_1). \end{cases}$$

Элементы множества $Hom_{Str}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ называются регулярными морфизмами (или просто морфизмами) рода структуры Σ_1 в род структуры Σ_2. Тот факт, что морфизм формул ω является морфизмом родов структур будем записывать в виде $\dot{\omega}$. Определим теперь композицию морфизмов. Пусть $\dot{\omega}_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, $\dot{\omega}_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ два морфизма, тогда из определения морфизма следует, что $B_0(\Sigma_1) \supset B_0(\Sigma_2) \supset B_0(\Sigma_3)$ и

$$R(\Sigma_1)\{X_1, \dots, X_{n(\Sigma_1)}, \jmath\} \Rightarrow R(\Sigma_2)\{Y_1, \dots, Y_{n(\Sigma_2)}, \bar{\sigma}_1(\omega_1)(\jmath)\},$$

$$R(\Sigma_2)\{Y_1, \dots, Y_{n(\Sigma_2)}, \jmath'\} \Rightarrow R(\Sigma_3)\{Z_1, \dots, Z_{n(\Sigma_3)}, \bar{\sigma}_2(\omega_2)(\jmath')\}.$$

Отсюда следует, что $R(\Sigma_1)\{X_1, \dots, X_{n(\Sigma_1)}, \jmath\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R(\Sigma_3)\{Z_1, \dots, Z_{n(\Sigma_3)}, (\bar{\sigma}_2(\omega_2) \circ \bar{\sigma}_1(\omega_1))(\jmath)\}.$$

Заметим теперь, что морфизм формул $\omega_2 : S_2 \to (\bar{\sigma}_2^{-1} \circ \bar{\sigma}_3)(S_3) = S_2'$ индуцирует морфизм $\omega_2' : (\bar{\sigma}_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2)(S_2) \longrightarrow$

$\longrightarrow (\bar{\sigma}_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2)(S_2') = (\bar{\sigma}_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_3)(S_3)$. Поэтому мы можем взять композицию $\omega_2' \circ \omega_1 = (S_1 \xrightarrow{\omega_1} (\bar{\sigma}_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2)(S_2) \longrightarrow$
$\xrightarrow{\omega_2'} (\bar{\sigma}_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_3)(S_3))$ откуда

получаем, что $\bar{\tau}_1(\omega_2' \circ \omega_1) = \bar{\tau}_1(\omega_2')\circ\bar{\tau}_1(\omega_1) =$
$= (\bar{\tau}_1(S_1) \xrightarrow{\bar{\tau}_1(\omega_1)} \bar{\tau}_2(S_2) \xrightarrow{\bar{\tau}_1(\omega_2')} \bar{\tau}_3(S_3))$. Можно доказать, что $\bar{\tau}_1(\omega_2') = \bar{\tau}_2(\omega_2)$. Поэтому ввиду отмеченной выше импликации получаем, что $(\omega_2' \circ \omega_1)$ есть морфизм рода структуры Σ_1 в род структуры Σ_3, который называется композицией морфизмов $\dot{\omega}_1$ и $\dot{\omega}_2$. Легко доказывается, что совокупность Str, вместе с определенными выше морфизмами, образует категорию. Обозначим через Str_0 полную подкатегорию категории Str, об"ектами которой являются все роды структур Σ, удовлетворяющие условию $B_0(\Sigma) = B_1(\Sigma)$.

8. Погружение категории Str_0 в полную категорию родов структур.

В этом пункте мы используем терминологию и обозначения [2] (приложение I)

Пусть $\Sigma \in Ob(Str_0)$, сопоставление $\bar{\Sigma}: X \longmapsto \bar{\Sigma}(X)$ очевидно, есть функтор из категории $(\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma)}$ в категорию $\mathcal{J}s\mathcal{E}ns$. Поэтому $((\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma)}, \bar{\Sigma})$ есть об"ект полной категории родов структур, так как соотношение

$$R(\Sigma)\{X_1, \ldots, X_{n(\Sigma)}, \mathcal{S}\}$$ переносимо.

Пусть $\dot{\omega}: \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ морфизм классических родов структур. Покажем, что ему соответствует морфизм $(p, \bar{\omega})$:
$: ((\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_1)}, \bar{\Sigma}_1) \longrightarrow ((\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_2)}, \bar{\Sigma}_2)$.

Так как $B_1(\Sigma_1) = \{X_1, \ldots, X_{n(\Sigma_1)}\} \supset B_1(\Sigma_2)$,
то $B_1(\Sigma_2) = \{X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}\}$, где

$\{i_1, \ldots, i_m\} \hookrightarrow \{1, \ldots, n(\Sigma_1)\}$ - вложение упорядоченных множеств. Положим для любого $X = (X_1, \ldots, X_{n(\Sigma_1)})$:

$$p(X) = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) \in Ob((\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_2)}).$$

Очевидно, $p: (\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_1)} \longrightarrow (\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_2)}$ есть функтор. Определим морфизм $(p, \bar{\omega})$ родов структур как морфизм функторов

$\overline{\omega}: \overline{\Sigma}_1 \longrightarrow \overline{\Sigma}_2 \circ p$. С этой целью, для любого $X \in Ob((\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_1)})$ и любого $s \in \overline{\Sigma}_1(X)$ положим:

$$\overline{\omega}(X)(s) = \overline{\sigma}_1(\omega)(s).$$

Лемма $\overline{\sigma}_1(\omega)(s) \in (\overline{\Sigma}_2 \circ p)(X)$.

Действительно, $\overline{\sigma}_1(\omega): \overline{\sigma}_1(S(\Sigma_1)) \longrightarrow \overline{\sigma}_2(S(\Sigma_2))$, а так как $p(X) = (X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ и $R(\Sigma_1)\{X_1, \dots, X_{n(\Sigma_1)}, s\} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow R(\Sigma_2)\{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}, \overline{\sigma}_1(\omega)(s)\}$,
то $\overline{\sigma}_1(\omega)(s) \in (\overline{\Sigma}_2 \circ p)(X)$, ч.т.д.

Из доказанной леммы следует, что $\overline{\omega}(X)$ отображает $\overline{\Sigma}_1(X)$ в $(\overline{\Sigma}_2 \circ p)(X)$ для любого $X \in Ob(\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma_1)}$ и тем самым задает морфизм $\overline{\omega}$.

Таким образом, сопоставления $\Sigma \longmapsto ((\mathcal{J}s\mathcal{E}ns)^{n(\Sigma)}, \overline{\Sigma})$, $\dot{\omega} \longmapsto (p, \overline{\omega})$ задают погружение категории Str_0 в полную категорию родов структур.

Замечание 1. Мы отождествляем классические роды структур, отличающиеся только обозначениями.

Замечание 2. Если определить естественным образом функтор $\varkappa: Str \to Str_0$, то взяв его композицию с построенным выше функтором из категории Str_0 в полную категорию родов структур, мы получим функтор из категории классических родов структур в полную категорию родов структур.

ЛИТЕРАТУРА

I Бурбаки Н. Теория множеств "Мир", М., 1965 г.

2 "Разработка методов проектирования АСУ капстроительства Минэнерго СССР". Раздел А. Часть 4. "Формальное проектирование системы управления для Главэнергостройпрома". Приложения к отчету ОМ-I56399 (отчет по теме 4631, арх. номер ОМ-I56639). "Оргэнергострой", М., 1973 г.