С.П. Никаноров

Элементы современной культуры мышления

Краткое введение

Цель моего изложения не состоит в том, чтобы «научить», а состоит в том, чтобы расширить кругозор, добиться результата «Я об этом слышал». Кругозор является географической картой: «теперь мне надо ехать за формальными аксиоматическими теориями».

В изложение включены разделы:

– Предмет и предметная область.
– Средства мышления: понятия, слова, термины, логика, математика.
– Предметы мышления.
– Теория графов.
– Представление предметных областей в аппарате графов. Примеры.
– Теория множеств.
– Теория структур и аппарат ступеней.
– Типы мышления.

1. Предмет и предметная область

Пусть у некоторого лица (группы лиц или организации) имеются интересы и возможности, позволяющие удовлетворять его интересы. Совокупность всех имеющихся у лица интересов и возможностей называется «**субъектом**», а как его сторона называется его «**субъектностью**». Человек (группа людей, или организация людей), располагающий субъектностью, называется «**носителем субъектности**». Возможности предполагаются согласованными с интересами.

Положим, что внимание субъекта привлекло некоторое явление или свойство, порождаемое частью реальности, доступной для наблюдения субъектом. Субъект может определить явление или свойство либо как его интерес, либо как возможность. В таком случае часть реальности, которую субъект изучает или использует, называется «**предметом субъекта**» или, кратко, «**предметом**». Без субъекта предметов не бывает. Если субъект наблюдает не одно явление или свойство, а их множество, в котором они многообразно связаны между собой, то такая часть реальности называется «**предметной областью**».

Предметы (и предметные области) различаются между собой по множеству оснований. Например, предметы простые и сложные, статические и изменяющиеся, уже изучавшиеся и новые, принадлежащие материальной стороне реальности и ее идеальной стороне. Предметом не обязательно является вещь. Предметом может быть разнообразие типов мышления, эволюция геологических структур, мнения историков о событиях какой-то эпохи. Предметом может быть развитие ранее изучавшегося предмета.

2. Средства мышления

Под «**мышлением**» здесь понимается интеллектуальный процесс, который из наличных у лица знаний получает интересующие лицо знания. Такой процесс обычно называется «познанием» (исследованием и др.).

- Понятие – основное средство мышления

Пусть имеется субъект, интересующийся некоторой, выделенной им, группой предметов. Он имеет возможность фиксировать каким-либо способом результаты своих наблюдений за всеми предметами группы и результаты своих сравнений всех результатов наблюдений всех предметов группы. Фиксируемый результат наблюдений называется «**признаком предмета**». У предметов группы субъектом может быть выделено разное число признаков.

Предметы, отобранные субъектом в группу, могут иметь:

- одни и те же признаки у всех предметов группы,
- различие между предметами в одном или нескольких признаках,
- различие между предметами во всех признаках.

В случае, когда в группе предметов у всех предметов одни и те же признаки, совокупность признаков называется «**понятием группы предметов**».

В случае, когда в группе предметов имеется различие между предметами в одном или нескольких признаках, а также имеется совокупность признаков, общих для всех предметов, которая называется «**понятием группы предметов**», а признаки, специфичные для предметов, называются «**понятием предмета, принадлежащего группе**».

В случае, когда различие между элементами группы таково, что у каждого предмета свой набор признаков, группа предметов не имеет понятия, а совокупность признаков каждого предмета группы называется «**понятием предмета**».

Понятие предмета, определяемое, принятым за существенный, одним признаком из множества принадлежащих предмету признаков, называется «**абстрактным понятием предмета**» (кратко – «абстракцией»). Понятие, имеющее несколько признаков, включая признак, определивший абстракцию, называется «**конкретизацией абстрактного понятия предмета**».

Чем больше признаков, дополняющих признак, определивший абстрактное понятие предмета, тем выше степень конкретизации абстрактного понятия предмета.

Определение «понятия», вводимое здесь, является конструктивным. Этим оно отличается от десятков форм определений понятия, например, определения по аналогии.

- Слово – носитель операционно значимого представления предмета и его понятия

Словом называется **произвольная совокупность знаков** (устных фонем, письменных знаков, красок, нот, жестов и многого другого). «**Выражение**» – совокупность нескольких слов. Слова, как таковые, лишены всякого смысла, так как не обозначают ни предмета, ни понятия о предмете.

- Термин – средство операционно значимого представления предмета и его понятия

Термином называется слово (или выражение), сопоставленное предмету или его понятию.

- Логика

Совокупность операций, которые позволяют из двух нормированных выражений (утверждений) по фиксированным правилам получать третье выражение (утверждение), является примером того, чем занимается логика. Например:

Все люди смертны.

Наполеон – человек.

___

Наполеон смертен.

- Математика

Математика – это учение о манипулировании символами.

К реальности математика не имеет никакого отношения, поскольку символы и манипулирование ими являются продуктами **непредметного мышления**, на которое иногда могут влиять какие-либо предметы.

К реальности имеют отношение происхождение математики и применение математики.

По различию непредметного смысла, придаваемого символам в математике, различаются два вида:

– математика **количеств** (числа, обозначаемые символами, называемыми «цифрами»),
– математика **качеств**, где символы – буквы алфавитов и специальные виды знаков.

Математика количеств изучает различные виды чисел (натуральные, целые, относительные; рациональные, иррациональные; трансцендентные, комплексные), и операции над числами.

Видами числовой математики являются: арифметика, алгебра, геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, векторный анализ, тензорный анализ.

Нечисловая (качественная) математика включает: теорию множеств, топологию, теорию групп, комбинаторику и графы, теорию категорий и функторов.

Математическая логика также является качественной математикой. Основной ее результат – разработка аппарата формальных аксиоматических теорий (алфавит, кванторы, правила образования выражений).

Различаются конечные совокупности чисел и предметов и бесконечные (счетные, континуумы, алефы). Различаются также актуальная и потенциальная бесконечность.

- Конструкты

«Конструктами» называют математические выражения, построенные с использованием только представлений математики бесконечных совокупностей, которые являются **предельными идеализациями** некоторых сторон или предметов реальности. Например, геометрическая прямая является бесконечно точной прямой. Ее нельзя представить никакими графическими способами. Геометрическая окружность определяется как множество точек, равноудаленных от данной. «Равно» означает бесконечно точно равно. Число 2 определено бесконечно точно. Два и одна миллиардная – это не два.

В жизни человечества конструкты имеют огромное значение. По существу, большая часть человеческой деятельности основана на использовании конструктов. Дома, коробки, книги – это все параллелепипеды; посуда, кабели, столбы – это цилиндры; цветочный горшок – усеченный конус.

Конструкты незаменимы, потому что они, благодаря своей идеальности, вечны.

К сожалению, кроме отдельных робких попыток, для биологии, социологии, психологии, тем более, для биогенеза и социогенеза конструкты не разработаны.

- Выразительные средства

Выразительные средства – это разнообразные способы сделать наглядными, легко усваиваемыми и успешно применяемыми весьма разнообразные, в том числе, сложные, трудно запоминаемые и не способствующие успеху применения символьные выражения.

Существует много видов выразительных средств, ориентированных на описание различных предметных областей.

Одним из таких видов выразительных средств является теория графов.

3. Виды предметов мышления

Вообще говоря, никаких видов предметов мышления, **кроме субъекта и его объекта**, не существует. Под «объектом» понимается часть реальности, на которой сосредоточено внимание субъекта, но которая еще не стала его предметом. Все остальные предметы мышления являются либо отношениями между субъектом и объектом, либо их производными предметами. Например, субъект, объектом которого является он сам; субъект, объектом которого является другой субъект; субъект, объектом которого является множество других субъектов.

Объекты без субъектов и субъекты без объектов не существуют.

Объекты должны быть **целостностями**, иными словами, они обеспечивают удовлетворение интересов субъекта, а возможности субъекта обеспечат достижение этого удовлетворения. Не целостные объекты могут играть промежуточные роли в удовлетворении субъектом своих интересов.

Заметим, что мышление субъекта может быть объектом его мышления, в этом случае говорят «об осознании себя» и «изменении типа мышления».

Теория систем – разнообразие конструктов, используемых субъектом для определения видов целостностей, представляемых классами систем.

4. Теория графов

Как и многое другое, теория графов является продуктом гонки вооружений. В больших масштабах один из разделов теории графов был применен в 1957 г.

В 1953 г. Советский Союз произвел испытания водородной бомбы. США немедленно и панически стали создавать средства противодействия. Одна из идей состояла в том, что не обнаруживаемые подводные лодки должны были дежурить у берегов СССР и в случае необходимости наносить уничтожающие атомные удары. Примерно через 5 лет одна такая лодка уже находилась на боевом дежурстве.

Создание потока таких лодок, образовавших систему, называемую «Поларис», обеспечивалось системой управления PERT, основанной на применении графа типа сети. Она управляла 12-уровневой кооперацией, включавшей тысячи организаций.

Потом были созданы сотни разнообразных систем учета, контроля, планирования и управления, основанных на использовании графов разных видов. Издано много книг по теории графов и ее применению. Разработаны и широко используются программные продукты, обрабатывающие разные виды графов.

Основные понятия теории графов и их представление

Основными понятиями теории графов являются «**точка**» и «**дуга**».

На бумаге или на экране точка обозначается точкой (или кругом, квадратом и т.п.).

Для точки используется название «вершина». Дуга обозначается отрезком линии, не обязательно прямой. Изображения точки и дуги не являются геометрическими. Дуга соединяет две точки. Её называют также «**связью**».

Две точки, соединенные дугой, называются «**отношением** между двумя точками».

Одна точка может соединяться с несколькими точками несколькими дугами.

В этом случае используется название «множество отношений одной точки с несколькими точками».

Графом называется множество точек, соединенных множеством дуг. Число точек произвольно, но конечно, и не менее двух. Число дуг определяется числом точек и числом отношений между ними.

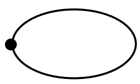
Две точки без дуги и дуга без двух точек не являются графом.

Виды графов

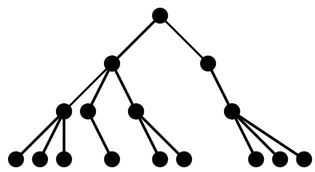
1. Графы на одном множестве

1.1. Простые графы: петля, цепь, звезда, цикл, дерево, сеть, полный граф

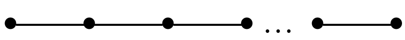
Петля:



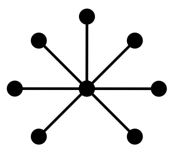
Дерево:



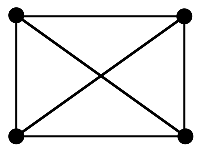
Цепь:



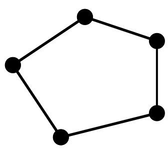
Звезда:



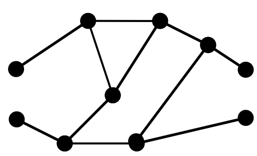
Полный граф на 4-х точках:



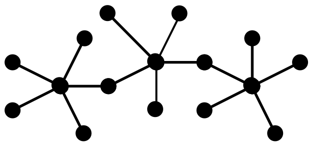
Цикл:

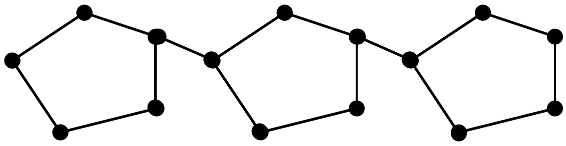


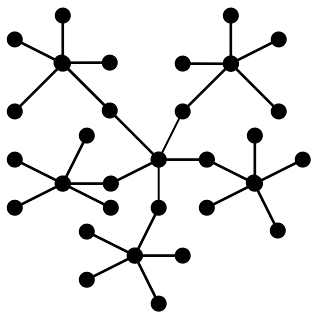
Сеть:

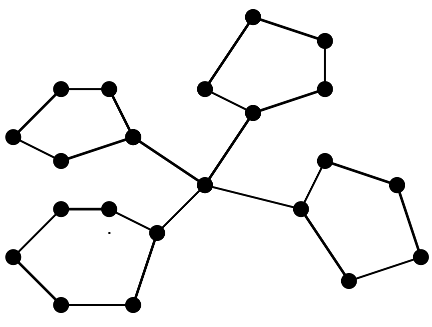


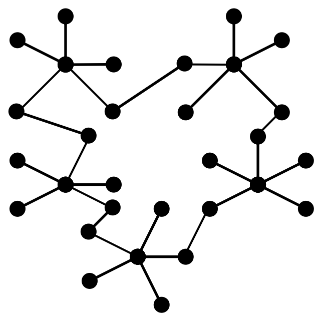
1.2. Производные графы: цепь звезд, цепь циклов, звезда звезд, звезда циклов, цикл звезд, лес, сеть сетей, цепь полных графов. В любой производный граф могут быть включены петли.

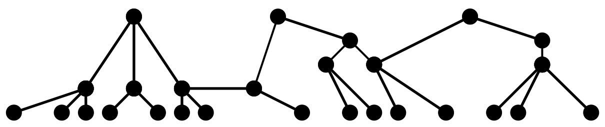
Цепь звезд: 

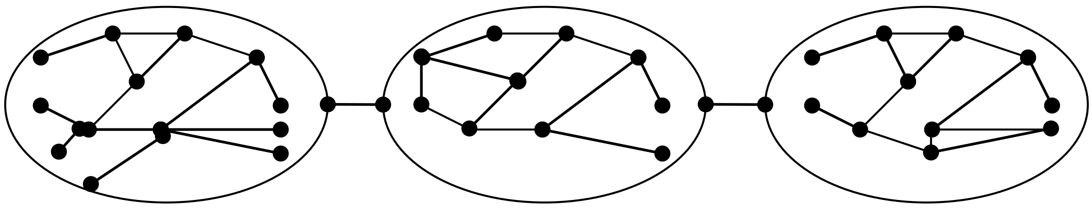
Цепь циклов: 

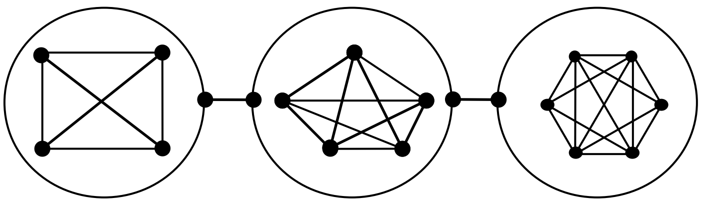
Звезда звезд: 

Звезда циклов: 

Цикл звезд: 

Лес: 

Сеть сетей: 

Цепь полных графов: 

Возможны и другие виды простых графов. Для каждого из представленных видов графов по различным основаниям могут быть образованы подвиды.

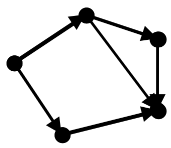
1.3. Усложненные графы образуются путем добавления понятий к основным понятиям теории графов.

Усложняющие понятия: ориентация, метризация, мультизация, именование и их комбинирование.

Ориентация вводит направление дуги.

Дуга изображается стрелкой: $\rightarrow$, а не линией —.

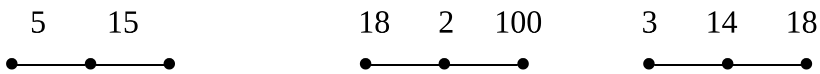
Ориентированное отношение – пара точек, соединенных стрелкой: $\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet$.



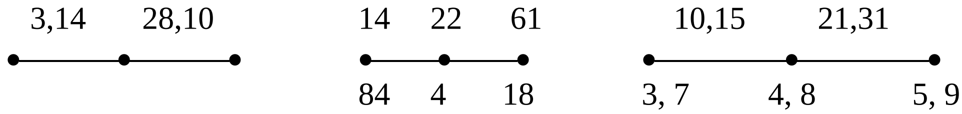
Ориентация всегда является односторонней.

Метризация вводит для точек и дуг числовые характеристики:

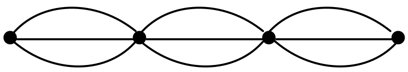
1. По одному числу на дугу или точку



2. По два числа на дугу, точку или на дугу и на точку



Мультизация – точки соединяются не одной дугой, а несколькими дугами.

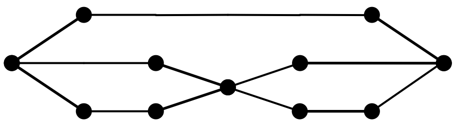


Именование: точкам и дугам присваиваются имена (имеющие смысл в теории, а не в ее приложении). Это могут быть номера точек, номера дуг, номера циклов, а также имена, специфические для графа, например, «начальные точки», «центр звезды».

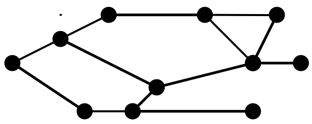
Комбинирование усложнений может производиться любым из возможных вариантов – по два, по три усложнения в любой комбинации, а также комбинирование всех четырех усложнений.

Моно- и поливидовые графы – это либо графы, в которых вид усложнения проводится по всему графу, называемому в этом случае «моновидовым графом», либо же разные виды усложнения проводятся по частям графа, который называется «поливидовым графом».

Симметричные и несимметричные графы – различающиеся наличием или отсутствием симметрии между частями графа



Симметричный граф

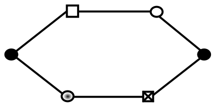


Несимметричный граф

2. Графы на разных множествах

Если используются разные множества, то точкам придается разный вид: по цвету, по геометрической форме, с помощью вспомогательных средств.

<u>Пример:</u> пять разных множеств:



Графы на разных множествах могут быть определены на всех видах простых графов и на всех видах усложненных графов.

5. Представление предметных областей в терминах графов

5.1. Принципы экспликации предметной области в терминах графов

Представление предметной области в терминах графов называется «**экспликацией** предметной области». В предметной области должны быть выделены **элементы**, которые в выбранном виде графа представляются точками, если элементы определены на одном множестве, и рядом символов, если элементы определены на группе множеств. В предметной области должны быть определены **отношения** между элементами, которые в выбранном виде графа представляются дугами. Представление точек и дуг графа в терминах предметной области называется «**интерпретацией графа в предметной области**».

Предметные области всегда **содержательны**, то есть, предоставляют возможность в зависимости от решаемой субъектом задачи выделять в них элементы многими разными способами. Элементы, однако, при использовании графа на одном множестве должны иметь один общий для всех элементов признак. При группе множеств возникают группы элементов, и в каждой группе – общий для всех элементов одной группы признак элемента. Иными словами, при интерпретации точек на предметную область ее элементы представляются не их именами, а их понятиями. Представление именами возможно только в случае, если соответствующие им понятия определены.

Дуги графа интерпретируются на отношения между элементами предметной области. Существует весьма большое число видов отношений. Например, поток есть отношение между истоком и стоком. Заметим, что отношения родства между матерью и ее ребенком и между братом и сестрой – разные. Сестра не родила брата. Понятие вида отношения между двумя элементами графа всегда должно быть определено и представлено термином. В графе на одном множестве различными по изображению дугами могут быть представлены разные отношения между элементами.

При применении теории графов для конкретного исследования, описания или проектирования предметных областей необходимо ясно и ответственно представлять, какие элементы и почему выделены, каковы определения их признаков (понятий) и в чем состоят отношения между ними. Если это не делается, то применение теории графов для экспликации предметной области приобретает **формальный** (бюрократический) характер и полностью теряет смысл.

Экспликация субъектом интересующей его предметной области в терминах теории графов, а также в терминах любых математических моделей или логических схем требует:

- определения задачи (теоретической или прикладной), которую в данной предметной области стремится решить субъект,
- понимания предметной области, достаточного для построения модели или её концептуальной схемы (принимаемой концепции предметной области, известной ее феноменологии и др.),
- наличия у субъекта разнообразия вариантов моделей или схем, допускающего их выбор.

5.2. Примеры представления предметных областей в терминах графов

Петля применяется, когда нужно представить отношение элемента с самим собой. Например, необходимость следить за правильностью выработки решения.

Цепи могут применяться для представления неразветвляющихся потоков, имеющих выраженную последовательность частей. Заметьте, что частный поток всегда начинается с истока и заканчивается стоком. В цепи потоков каждый ее частный поток, кроме начального и конечного частного потока, имеет и исток, и сток, которые образуют однородное (с одним общим признаком) множество элементов. Начальный исток и конечный сток в это множество не входят. Необходимо также заметить, что для представления потоков используется ориентированный и, возможно, метризованный граф.

Звезды могут представлять отношения между лицом и окружающими его лицами. Заметьте, что элемент, представленный в графе типа звезды центром, находится во множестве отношений, в то время как все периферийные элементы звезды находятся в одном отношении. Все отношения могут быть разными.

Циклы могут представлять повторяющиеся наборы процессов. Например, в петле обратной связи системы управления. Здесь также используется ориентированный граф.

Деревья имеют характерную область применения, примером которой являются конструктивный и функциональный составы технической системы. Элементами первого являются предметы, являющиеся продуктом производства. Элементами второй являются конечные и промежуточные функции. Между этими деревьями определяются отношения между комплексами предметов производства, выполняющих данную функцию. В обоих случаях используется одно и то же отношение – «состоять из».

Сети используются, главным образом, для представления сложных процессов создания систем обороны, заводов, реконструкции городов и других подобных объектов, а также и для обычных организаций. Элементом является вход процесса, который в то же время является выходом предшествующего процесса. Сочетание вход/выход называется «событием». Отношение между входом и выходом называется «процессом».

Сеть сетей используется для представления процессов развития сложных объектов. Например, сетью представлен технологический процесс некоторого производства. В связи с какими-то обстоятельствами процесс преобразуется, и поэтому представляется новой сетью. Преобразования могут следовать одно за другим, образуя сеть сетей.

Полный граф используется для представления всевозможных вариантов структуры отношений, которые могут возникать между элементами, образующими множество. Если множество определено, то полный граф позволяет определить все варианты цепей, возможных на данном множестве, все варианты звезд и т.д., не исключая ни одного типа простых графов, а, может быть, и усложненных. Полный граф является мощным средством интеллектуальной, а не прикладной работы, но это такая интеллектуальная работа, которая позволяет овладеть прикладной.

6. Теория множеств

6.1.История теории множеств

Теория множеств может быть понята ни в коем случае как то, что представлено в каком-либо школьном или ВУЗовском учебнике по математике.

Она может быть понята только из тщательного изучения до мельчайших деталей ее создания Г. Кантором, наполненного трагедиями, ее признания, наполненного еще большими трагедиями, становления ее господства в математике, придания ей современной формы, завершения ее первоначального направления. Возникшего далее внезапного колоссального интеллектуального взрыва, определившего наличную теорию множеств, созданную Г. Кантором, всего лишь как вид. Трагический путь этой линии. Выявление центральной проблемы разработки и применения нового вида теории множеств, который претендует на то, что теория множеств как основание всей математики – всего лишь зародыш применения теории множеств вне математики, для описания, исследования, проектирования и развития произвольных предметных областей реальности. Назревает очередная трагедия в истории теории множеств.

<u>Возникновение теории множеств, наполненное трагедиями</u>

Первоначальный вариант теории множеств был создан немцем Георгом Кантором. Он обратил внимание на то, что на плоскости с координатами все геометрические фигуры задаются указанием точек. Его заинтересовало, сколько всего точек на конечном отрезке прямой, на бесконечной прямой и на плоскости. Будучи математиком, но изучавшим философию и богословие, истово верующим, в этих бесконечностях он увидел проявление

Господа. Он ввел различение между актуальной бесконечностью (отрезком линии) и потенциальной бесконечностью (ряд натуральных чисел). Он сравнил бесконечность ряда натуральных чисел, названной им «счётной», и бесконечность точек отрезка линии, которая была бесконечностью счётных бесконечностей, и была им названа «континуум». Общее имя таких множеств – «трансфинитные», буквально, «бес-конечные» (финиш = конец).

Кантор вел себя очень активно – публиковал свои результаты, много раз выступал с докладами, публиковал книги и статьи, переписывался и беседовал. На возражения: «Это – не математика» он отвечал: «Математика – свободна». Он давал своим математическим результатам мировоззренческое, философское, богословское и естественнонаучное истолкования. Всюду он встречал непонимание, категорическое отвержение, презрение. Это была середина XIX века, когда во всех областях науки были получены значимые результаты.

Но для целей практики трансфинитные множества непригодны (пока). Практика имеет дело (так считается) только с конечным. Таким образом, в отличие от арифметики, геометрии, алгебры, без которых практики не может быть, трансфинитные множества (будто бы) не имеют места в практике.

С точки зрения Кантора, который всю свою вторую половину жизни искал решение этой проблемы, отсутствие практических (и религиозных) приложений теорий множеств сводит его открытие к нулю.

Переживания Кантора были так сильны, что ему пришлось много раз ложиться в психиатрическую больницу.

Так возникла нечисловая математика…

Признание теории множеств Кантора

Во времена Кантора математика была только числовой. Изучение «точек», производимое без чисел, да еще их трансфинитные множества, выглядело для тогдашних математиков абсурдным. Они писали отрицательные отзывы, отстраняли Кантора от преподавания.

Спустя 30-40 лет после первой публикации Кантора появились первые признаки внимания к теории множеств. Постепенно для математиков стал понятен факт, состоящий в том, что в математике нет ничего, кроме множеств и их отношений. Возникла специализация математиков. Начали читаться лекции по теории множеств.

Теорий множеств много

И вдруг Бертран Рассел обнаружил полную логическую несостоятельность теории множеств Кантора. Он демонстрировал эту несостоятельность с помощью «парадокса каталогов». Пусть имеется множество каталогов «всего на свете». Теперь рассмотрим каталог всех каталогов. Принадлежит ли он к множеству всех каталогов? Если он принадлежит, то он не является каталогом всех каталогов. Если не принадлежит, то он не является каталогом. Математический мир был изумлен, не знали, что с этим делать. Но Рассел предложил радикальное решение этого парадокса, создав «теорию типов». Пусть имеется множество множеств. Ни один признак определений элементов в любом из множеств **не может быть** признаком в определении элементов множества множеств. Иными словами, множества и множество этих множеств полностью разделены. Это – разные миры, по терминологии Рассела – разные типы множеств. Заметим, что каталоги – это не точки плоскости…

Стало понятно, что о множествах почти ничего не известно. Началась логическая обработка теории множеств Кантора. Были разработаны формальные аксиоматические теории множеств. Показано, что существуют разные виды теории множеств.

И все они были нечисловые, а их элементами по-прежнему были точки.

Переход к множеству вещей, а не точек

И вдруг в 1942 г. на первой лекции по анализу, читаемой на Физическом факультете МГУ, Андрей Николаевич Колмогоров говорит:

«Солнце, свинья и апельсин составляют множество».

Все дальнейшее изложение анализа мною воспринималось как отклонение от «Солнца, свиньи и апельсина».

Колмогоров, будущий Мировой математик №1, уже тогда знал, что предмет теории множеств – вещи, а не точки, что **конечные, а не трансфинитные, множества составляют предмет математики** и, наконец, он знал, что математика, создавшая огромную культуру, находится вне жизни. Это был гигантский вызов знавшей себе цену математике. Недаром В.В. Налимов считал Колмогорова человеком «закрытым».

И до сих пор нет понимания, как далеко Колмогоров смотрел тогда…

Героический подвиг французов

Когда в 1914 году началась Первая мировая война, немцы своих математиков на фронт не отправляли, а французы – отправляли. По окончании войны у Франции, которая была первой математической державой мира, математиков почти совсем не стало. В конце 20-х – начале 30-х годов небольшая группа выживших и молодых математиков решила вернуть Франции статус первой математической державы мира. Для этого они собрались показать, что никакой «математики» не существует, а есть лишь несколько десятков дисциплин, развивающихся независимо и не позволяющих создать представление о «математике». Необходимо создать единую математику. Их идея состояла в том, что **основанием всей математики должна быть формально строго определенная теория множеств**. Иными словами, в мире нет ничего, кроме элементов и отношений между ними… Теория множеств тогда уже была фундаментом всей математики, но никому из математиков не приходила в голову идея, что теория множеств может стать основанием унификации всей математики. Примерно за 30 лет эта группа выпустила около 20-ти томов, представивших унифицированную математику.

Математики всего мира, в том числе и французские, как обычно, отнеслись к этой фундаментальной идее и ее реализации скептически. «Мы как занимались алгеброй, так и будем ею заниматься». Однако, величие идеи и труда было таким, что игнорировать их было невозможно. Влекла также надежда вернуть Франции статус первой математической державы мира.

Переход СССР на теорию множеств

Так или иначе, но во всех средних школах Франции преподавание математики было переведено на теорию множеств. Не исключено, что Колмогоров, уже создавший у себя новое представление о теории множеств, использовал опыт Франции для доказательства руководителям советского образования необходимости поставить преподавание теории множеств в средней школе.

Центральный комитет партии поддержал идею Колмогорова. Однако школьные учителя теории множеств не знали, как ее преподавать – не понимали, а, главное, что их беспокоило, зачем это делать? «В бассейн входят две трубы…».

Дальнейшее было наполнено тяжелыми трагедиями, как в СССР, так и во Франции, и во всем мире. Теория конечных множеств так и не нашла себе места в культуре человечества.

Итог

Мы начали широко использовать теорию множеств для прикладных работ с начала 70-х годов. Создана целая культура предметно ориентированного применения теории множеств. Издано много книг и статей. Кафедра МФТИ уже 18 лет выпускает специалистов по исследованию предметных областей с помощью аппарата теории множеств. Тайный замысел Колмогорова начал осуществляться.

Но всё это – даже не начало. Но одно то, что появляются люди, понимающие, что теория множеств должна теоретизировать философскую проблему определения категории «качество» (не смешивать с качеством свинины!), показывает, что всё же времена меняются. И будущее трансфинитных множеств уже не выглядит загадочным.

6.2. Теория множеств

Виды теорий множеств

Атрибуты	Значение атрибутов
Определение множества	– имеется – отсутствует
Определения элементов множества	– имеются – отсутствуют
Мощность множества (число элементов)	– определена – не определена
Разнообразие элементов множества	– определено: имеется полное разнообразие, либо все элементы одинаковы («экземпляры») – не определено

Комбинации значений атрибутов произвольны. Полное разнообразие видов теории множеств при этом подходе к его определению составляет 16 (2^4).

Однако, этим разнообразие теорий множеств не ограничивается. Например, если мощность множества определена, то она может быть либо конечной, либо бесконечной. Или определения множества и значения его атрибутов даются в прикладных терминах, или в терминах логики, возможно, математики. Во множестве часть элементов разнообразны, а другая часть – экземпляры.

Классическая теория множеств, называемая «наивной», определяет множество как «множество точек». Определений элементов нет. Понятно, что в наивной теории мощность множества всегда бесконечна, его элементы не различимы («экземпляры точек»). Если рассматриваются трансфинитные множества, то их разнообразие определяется только различием бесконечностей. Бесконечности больше счетной называются «алефом». Каждая следующая бесконечность называется алефом с номером: алеф 1, алеф 2, …

Множества множеств в рамках теории типов от множеств элементов ничем не отличаются друг от друга. И те, и другие являются наивными теориями множеств. Переходы по уровням теории типов в этом отношении ничего не меняют.

В школах и ВУЗах (кроме математических) преподается вариант теории множеств, в котором мощность множества не определяется.

Операции над множествами

Зато учат пересечению, объединению, композиции и т.п., что может быть ориентировано на множества с конечной мощностью. Обычно рассматриваются только пары множеств.

В формальной аксиоматической теории множеств с различными элементами вводятся операции прямого произведения множеств и перечисления всех подмножеств множества. Может определяться прямое произведение множества на самого себя.

Теоретико-множественные конструкты

В наших опубликованных работах определено около 200 теоретико-множественных конструктов, представляющих некоторые теоретико-системные классы.

6.3. Прикладное применение теории множеств

Прикладное применение теории множеств возможно, только если принимается концепция: «В мире существуют только **разнообразия элементов предметов** и их **отношения**».

Урок из этой концепции состоит в том, что какую бы предметную область ни взять, в ней необходимо выделить разнообразия и их отношения. Но теории разнообразий не существует. Известна попытка Б.Н. Михалевского (ЦЭМИ АН СССР) создать теорию государственного планирования СССР с использованием теории множеств.

Будущее прикладного применения теории множеств: сначала должна быть разработана теория качеств предметов. Для этого сначала необходимо разработать теорию разнообразия предметов.

Применение трансфинитных множеств: создание культуры разработки и применения конструктов во всех областях, а не только в математике, в естественнонаучных дисциплинах, в технике и в теории организаций.

7. Теория структур и аппарат ступеней

Группа французских математиков, создавших унифицированную математику, выступала под псевдонимом «Никола Бурбаки». Все их книги выпускались под этим псевдонимом.

Для унифицированного представления всех разделов математики ими был разработан вариант теории множеств, представленной как формальная аксиоматическая теория.

Основным понятием теории структур является «**ступень множества**» или, кратко, «**ступень**».

Это понятие вводится следующим образом.

Декартианом D называется прямое произведение множеств. Декартиан может быть двух-, трех, …, n-местным.

Булеаном B называется множество всех подмножеств множества.

Пусть задано множество X. Ступени определяются следующим образом.

$$\left.\begin{array}{llll} X & & & \\ DX & BX & DBX & BDX \\ DDX & BBX & DDBX & BBDX \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{array}\right\} \ldots$$

Число ступеней на одном множестве при его бесконечной мощности – бесконечно.

Множество всех ступеней на одном множестве называется первой шкалой множеств. Вторая шкала – на двух множествах, а n-ая шкала – на n множествах:

D(X, Y), D(X, Y, Z) … BD(X, Y), BD(X, Y, Z) …

Показано, что среднее предприятие определяется 600-ми различными множествами. Таким образом, теоретико-множественная теория такого предприятия может быть построена на ступенях 600-ой шкалы множеств.

Множества могут определяться и как множества чисел, и как множества предметов. Декартиан от пары таких множеств обеспечивает метризацию разнообразий элементов. Тем самым, теория множеств становится не только «качественной», но также и качественно-количественной.

Аппарат ступеней образован бесконечным множеством шкал множеств, число ступеней на каждой шкале бесконечно, мощности множеств могут быть бесконечными.

Таковы выразительные возможности аппарата ступеней…

8. Типы мышления

Типы мышления, которыми располагает индивид, различаются в весьма широких пределах в зависимости от возраста, пола, состояния здоровья, образования, культуры группы, к которой он принадлежит, национальности, наследственности, совокупности пережитого и других факторов.

Типы мышления могут быть различены:

- по способам и масштабу охвата интересующего предмета или предметной области,
- по широте разнообразия предметов мышления,
- по способам перехода от фиксации предмета мышления до заключения о его существенных признаках, причинах, определяющих состояние предмета, характера и масштаба изменений предмета,

– по степени использования стандартных приемов мышления (например, аналогий, логики, математики),
– по степени свободы от распространенных представлений о предмете и способах мышления о предмете,
– по степени универсализации и специализации приемов мышления,
– по способности эффективно сочетать при исследовании предмета различные приемы мышления (например, интуиции с использованием математики),
– по масштабу и упорядоченности накопленного опыта исследования предметов и предметных областей.

Отдельным, крайне важным в современных условиях типом мышления является, как говорят некоторые авторы, «мышление о (своем) мышлении». Этот эффект известен давно, например, он выражен в мудрости: «Многознание ума не прибавляет» (ум прибавляется только от решения задач). Эффект называют «рефлексией», «осознанием». Однако, современное представление о «мышлении о мышлении» отличается от этих представлений широким использованием **инструментальных средств** и способностью точно квалифицировать предметную область относительно ее аспектов, интересующих исследователя.